# ACEF/1920/0313787 — Guião para a auto-avaliação

# I. Evolução do ciclo de estudos desde a avaliação anterior

- 1. Decisão de acreditação na avaliação anterior.
- 1.1. Referência do anterior processo de avaliação.

ACEF/1314/13787

1.2. Decisão do Conselho de Administração.

**Acreditar** 

1.3. Data da decisão.

2015-06-22

- 2. Síntese de medidas de melhoria do ciclo de estudos desde a avaliação anterior, designadamente na sequência de condições fixadas pelo CA e de recomendações da CAE.
- 2. Síntese de medidas de melhoria do ciclo de estudos desde a avaliação anterior, designadamente na sequência de condições fixadas pelo CA e de recomendações da CAE (Português e em Inglês, PDF, máx. 200kB).

<sem resposta>

- 3. Alterações relativas à estrutura curricular e/ou ao plano de estudos(alterações não incluídas no ponto 2).
- 3.1. A estrutura curricular foi alterada desde a submissão do guião na avaliação anterior?
- 3.1.1. Em caso afirmativo, apresentar uma explanação e fundamentação das alterações efetuadas.

<sem resposta>

3.1.1. If the answer was yes, present an explanation and justification of those modifications.

<no answer>

3.2. O plano de estudos foi alterado desde a submissão do guião na avaliação anterior?

Sim

3.2.1. Em caso afirmativo, apresentar uma explanação e fundamentação das alterações efetuadas.

As unidades curriculares Introdução à Investigação Operacional (IIO) e Otimização Linear (OL) permutaram entre semestres, passando a primeira a figurar no 1.º semestre do 3.º ano e a segunda no 2.º semestre do 2.º ano. Esta alteração permite eliminar o tópico Programação Linear do programa de IIO, sendo este conteúdo programático tratado em profundidade em OL. Desta forma, cria-se espaço em IIO para tratar alguns temas com maior profundidade e introduzir a lecionação do tópico Cadeias de Markov.

Eliminação da lista de unidades curriculares opcionais para o 2.º semestre do 3.º ano da opção Topologia e Homotopia, devido à não existência de alunos interessados em frequentar a UC, em anos letivos consecutivos.

3.2.1. If the answer was yes, present an explanation and justification of those modifications.

The curricular units Introduction to Operational Research (IOR) and Linear Optimization (LO) exchanged between semesters. Currently, the first is in the 1st semester of the 3rd year and the second in the 2nd semester of the 2nd year. This change allows to eliminate Linear Programming from the syllabus of IOR, being this topic covered in depth in LO. This way, time is allowed to go deeply in some of the topics in the syllabus of IOR and to introduce Markov Chains in

Elimination of the curricular unit of Topology and Homotopy from the list of optional curricular units for the 2nd semester of the 3rd year, due to the absence of students interested in the curricular unit in consecutive years.

- 4. Alterações relativas a instalações, parcerias e estruturas de apoio aos processos de ensino e aprendizagem (alterações não incluídas no ponto 2)
- 4.1. Registaram-se alterações significativas quanto a instalações e equipamentos desde o anterior processo de avaliação?

Não

4.1.1. Em caso afirmativo, apresentar uma breve explanação e fundamentação das alterações efetuadas.

<sem resposta>

4.1.1. If the answer was yes, present a brief explanation and justification of those modifications.

<no answer>

4.2. Registaram-se alterações significativas quanto a parcerias nacionais e internacionais no âmbito do ciclo de estudos desde o anterior processo de avaliação?

Não

4.2.1. Em caso afirmativo, apresentar uma síntese das alterações ocorridas.

<sem resposta>

4.2.1. If the answer was yes, present a synthesis of those changes.

<no answer>

4.3. Registaram-se alterações significativas quanto a estruturas de apoio aos processos de ensino e aprendizagem desde o anterior processo de avaliação?

Não

4.3.1. Em caso afirmativo, apresentar uma síntese das alterações ocorridas.

<sem resposta>

4.3.1. If the answer was yes, present a synthesis of those changes.

<no answer>

4.4. (Quando aplicável) registaram-se alterações significativas quanto a locais de estágio e/ou formação em serviço, protocolos com as respetivas entidades e garantia de acompanhamento efetivo dos estudantes durante o estágio desde o anterior processo de avaliação?

Não

4.4.1. Em caso afirmativo, apresentar uma síntese das alterações ocorridas.

<sem resposta>

4.4.1. If the answer was yes, present a synthesis of those changes.

<no answer>

- 1. Caracterização do ciclo de estudos.
- 1.1 Instituição de ensino superior.

Universidade Nova De Lisboa

- 1.1.a. Outras Instituições de ensino superior.
- 1.2. Unidade orgânica (faculdade, escola, instituto, etc.):

Faculdade De Ciências E Tecnologia (UNL)

- 1.2.a. Outra(s) unidade(s) orgânica(s) (faculdade, escola, instituto, etc.) (proposta em associação):
- 1.3. Ciclo de estudos.

Matemática

1.3. Study programme.

**Mathematics** 

1.4. Grau.

Licenciado

1.5. Publicação do plano de estudos em Diário da República (PDF, máx. 500kB).

1.5. LM alt pl estudos 2018.pdf

1.6. Área científica predominante do ciclo de estudos.

Matemática

1.6. Main scientific area of the study programme.

Mathematics

1.7.1. Classificação CNAEF – primeira área fundamental, de acordo com a Portaria n.º 256/2005, de 16 de Março (CNAEF-3 dígitos):

461

1.7.2. Classificação CNAEF – segunda área fundamental, de acordo com a Portaria n.º 256/2005, de 16 de Março (CNAEF-3 dígitos), se aplicável:

<sem resposta>

1.7.3. Classificação CNAEF - terceira área fundamental, de acordo com a Portaria n.º 256/2005, de 16 de Março (CNAEF-3 dígitos), se aplicável:

<sem resposta>

1.8. Número de créditos ECTS necessário à obtenção do grau.

180

1.9. Duração do ciclo de estudos (art.º 3 DL n.º 74/2006, de 24 de março, com a redação do DL n.º 63/2016 de 13 de setembro):

3 anos (6 semestres)

1.9. Duration of the study programme (article 3, DL no. 74/2006, March 24th, as written in the DL no. 63/2016, of September 13th):

3 years (6 semesters)

1.10. Número máximo de admissões.

30

1.10.1. Número máximo de admissões pretendido (se diferente do número anterior) e respetiva justificação.

<sem resposta>

1.10.1. Intended maximum enrolment (if different from last year) and respective justification.

<no answer>

### 1.11. Condições específicas de ingresso.

Podem candidatar-se ao curso, através do Concurso Nacional do Ensino Superior, os estudantes que concluíram com aproveitamento o 12.º ano de escolaridade. As provas específicas requeridas são:

Matemática A

Nota de candidatura: 120 pontos (numa escala de 200 pontos) Prova de ingresso: 120 pontos (numa escala de 200 pontos)

Fórmula de Cálculo:

Média do Ensino Secundário: 50%

Provas de ingresso: 50%

# 1.11. Specific entry requirements.

The study programme accepts candidates that have completed the 12th year of secondary school through the National Call for University Access. The qualifications required are:

Mathematics A

Application mark: 120 / 200 Admission examination: 120 / 200

Computation Rule:

Secondary School Grade Average: 50% Admission examinations: 50%

### 1.12. Regime de funcionamento.

Diurno

### 1.12.1. Se outro, especifique:

### 1.12.1. If other, specify:

n.a.

### 1.13. Local onde o ciclo de estudos será ministrado:

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

### 1.14. Regulamento de creditação de formação académica e de experiência profissional, publicado em Diário da República (PDF, máx. 500kB).

1.14. 11.2 RegCredComp DR 16junho2016.pdf

### 1.15. Observações.

O plano de estudos correspondente à Licenciatura em Matemática tem a duração de 3 anos, consistindo numa formação básica em Matemática, essencial à prossecução de estudos em segundos ciclos nesta área científica ou em áreas afins, em particular no Mestrado em Matemática e Aplicações ou no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, ambos ciclos de estudos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Atualmente, a Licenciatura em Matemática não oferece perfis, sendo o sexto semestre completamente composto por unidades curriculares opcionais, permitindo aos estudantes a diversificação da sua formação, suportada por unidades obrigatórias nos cinco primeiros semestres. O plano curricular está conforme o Perfil Curricular da FCT, caracterizado pela oferta das unidades curriculares "Competências Transversais para Ciências e Tecnologia", "Programa de Introdução à Investigação Científica" ou "Programa de Introdução à Prática Profissional" e "Ciência, Tecnologia e Sociedade". Através da "Unidade Curricular do Bloco Livre" (Área Científica QAC - Qualquer Área Científica) existente no sexto semestre do plano curricular, o estudante terá ainda de obter 6 ECTS em unidades curriculares por si escolhidas numa lista aprovada anualmente pelo Conselho Científico da FCT NOVA e que inclui unidades curriculares de todas as áreas científicas da FCT NOVA.

### 1.15. Observations.

The study programme corresponding to the first cycle in Mathematics is a three year programme, providing a basic formation in Mathematics, essential to access a second cycle in this scientific area or in a similar one, in particular allowing the access to the Master in Mathematics and Applications or to the Master in Teaching Mathematics for the Third Cycle of the Basic and Secondary Schools, both second cycles of Faculty of Sciences and Technology of Universidade Nova de Lisboa. Nowadays, the first cycle in Mathematics does not offer profiles, being the sixth semester fully composed by optional courses, allowing students to diversify their training, supported by mandatory curricular units in the first five semesters. The curricular plan conforms to the FCT Curricular Profile, which is characterized by the presence of several units that develop transferable skills ("Soft Skills for Sciences and Technology"), introduction to research ("UROP") or professional practice ("UPOP"), and some vision about science, technology and society ("Science, Technology and Society"). There is also the "Unrestricted Elective" slot, present in the sixth semester of the study plan, indicated as contributing to the Scientific Area QAC (Any Scientific Area), where the student must obtain 6 ECTS from a list of courses, annually approved by the Scientific Council of FCT/NOVA, which includes courses from all the scientific areas of the school.

# 2. Estrutura Curricular. Aprendizagem e ensino centrados no estudante.

- 2.1. Percursos alternativos, como ramos, variantes, áreas de especialização de mestrado ou especialidades de doutoramento, em que o ciclo de estudos se estrutura (se aplicável)
- 2.1. Ramos, opções, perfis, maior/menor, ou outras formas de organização em que o ciclo de estudos se estrutura (se aplicável) / Branches, options, profiles, major/minor, or other forms of organisation compatible with the structure of the study programme (if applicable)

Opções/Ramos/... (se aplicável):

Options/Branches/... (if applicable):

<sem resposta>

# 2.2. Estrutura curricular (a repetir para cada um dos percursos alternativos)

#### 2.2. Estrutura Curricular -

### 2.2.1. Ramo, opção, perfil, maior/menor, ou outra (se aplicável).

<sem resposta>

# 2.2.1. Branches, options, profiles, major/minor, or other (if applicable)

### 2.2.2. Áreas científicas e créditos necessários à obtenção do grau / Scientific areas and credits that must be obtained before a degree is awarded

Área Científica / Scientific Area	Sigla / Acronym	ECTS Obrigatórios / Mandatory ECTS	ECTS Mínimos Optativos / Minimum Optional ECTS*	Observações / Observations
Física / Physics	F	3	0	
Informática / Informatics	1	6	0	
Matemática / Mathematics	M	135	24	
Ciências Humanas e Sociais / Social Sciences and Humanities	CHS	3	0	
Competências Complementares / Transferable Skills	CC	3	0	
Qualquer Área Científica / Any Scientific Area	QAC	0	6	
(6 Items)		150	30	

# 2.3. Metodologias de ensino e aprendizagem centradas no estudante.

# 2.3.1. Formas de garantia de que as metodologias de ensino e aprendizagem são adequadas aos objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências) a desenvolver pelos estudantes, favorecendo o seu papel ativo na criação do processo de aprendizagem.

O ciclo de estudos compreende um conjunto de Unidades Curriculares (UC) com metodologias de ensino variadas, adaptadas aos objetivos de aprendizagem. O funcionamento da grande maioria das UC decorre em regime de aulas teórico-práticas o que permite uma maior interação entre os objetivos complementares: "Saber" e "Saber Fazer". Em algumas UC, a lecionação é feita em parte em laboratório computacional, explorando a componente numérica associada ao programa formativo. Em alguns casos, as UC contemplam o desenvolvimento de projetos que contribuem para os objetivos de "Soft Skills", tais como o trabalho autónomo e em equipa. Em todas as UC estão previstos períodos específicos de atendimento por parte dos docentes onde os estudantes podem beneficiar desta interação individualizada.

# 2.3.1. Means of ensuring that the learning and teaching methodologies are coherent with the learning outcomes (knowledge, skills and competences) to be achieved by students, favouring their active role in the creation of the learning process.

The study programme contains a set of curricular units (CUs) with varied teaching methodologies, adapted to the corresponding learning outcomes. In general, classes are theoretical-practical allowing greater interaction between two strands: "Knowledge" learning outcomes and "Know-how to Apply". Some CUs use computer laboratories, exploring the numerical component of the syllabus. In some cases, the CUs contemplate the development of projects, which contributes to the development of "Soft-skills", namely those related to autonomous and team work. All CUs have specific dedicated office-hours where students can benefit from a one-to-one interaction with the professors.

# 2.3.2. Forma de verificação de que a carga média de trabalho necessária aos estudantes corresponde ao estimado em

O Sistema Interno de Garantia da Qualidade implementado na FCT NOVA compreende o seguinte procedimento. No final de cada edição de uma Unidade Curricular (UC), os estudantes devem responder a um inquérito contemplando o funcionamento da mesma, incluindo a sua perceção sobre o tempo despendido nos vários aspetos da sua frequência, nomeadamente no contacto com os docentes (aulas ou horário de dúvidas), em estudo autónomo ou em processos de avaliação (testes e/ou exames). Sempre que as respostas dos alunos sugiram uma grande diferença em relação aos ECTS atribuídos à UC, o responsável da UC deverá explicar essa divergência e, se necessário, propor alterações ao funcionamento da mesma. Estas alterações são posteriormente discutidas e validadas pelo coordenador da Licenciatura e pelo presidente do Departamento de Matemática.

# 2.3.2. Means of verifying that the required average student workload corresponds to the estimated in ECTS.

The Internal Quality System implemented at FCT/NOVA integrates the following procedure. At the end of each edition of a Curricular Unit (CU), students must answer a survey covering the functioning of the CU, including their perception of the time spent on several aspects related to the learning process, namely contact hours (classes and office hours), self-study, and evaluation processes (tests and/or exams). Whenever the students' responses suggest a significant difference to the ECTS assigned to the CU, the responsible by the course should justify this divergence, and, if necessary, propose changes to the functioning of the course. These changes are discussed and validated by the coordinator of the study programme and by the head of Department.

### 2.3.3. Formas de garantia de que a avaliação da aprendizagem dos estudantes é feita em função dos objetivos de aprendizagem.

Na maioria das Unidades Curriculares (UC), a avaliação da aprendizagem faz-se por testes, em alguns casos complementada com trabalhos práticos, de acordo com o regulamento geral de avaliação da FCT NOVA. Há sempre lugar a exame de recurso. As metodologias de avaliação de cada UC são especificadas na respectiva ficha, antes do início do semestre, e são verificadas pelo responsável da UC e pela Comissão Científica do Curso, que promovem a sua harmonização e adequação aos objetivos da respetiva UC e do curso. As metodologias de avaliação são continuamente aferidas e ajustadas por inquéritos aos estudantes. Os relatórios das UC, elaborados pelos docentes, com respostas explícitas aos resultados desses inquéritos e propostas para melhorar o funcionamento da UC, incluindo a metodologia de avaliação, são apreciados pelo Coordenador do Curso, pelo Presidente do Dep. e pelo Conselho Pedagógico. Este procedimento é integrado no Sistema Interno de Garantia da Qualidade implementado na FCT NOVA.

### 2.3.3. Means of ensuring that the student assessment methodologies are aligned with the intended learning outcomes.

For most Curricular Units (CU), assessment of learning is based on tests, sometimes complemented by practical works, following the general evaluation regulation of FCT NOVA. There is always a last resort final examination. Evaluation methodologies of each CU are specified in the corresponding unit files, before the beginning of the semester, and verified by the CU Responsible and by the Scientific Committee of the study program, which play a role in promoting their harmonization and adequacy to the CU goals and of the study program. Evaluation methodologies are continuously assessed and adjusted, so informed by student surveys. Teachers elaborate CU reports, explicitly responding to the survey results and proposing measures to improve the CU functioning, including assessment methodologies, which subsequently are appreciated by the Program Coordinator, the Head of Department, and the Pedagogical Council. The procedure is part of the Internal Quality System implemented at FCT NOVA.

# 2.4. Observações

2.4 Observações.

n.a.

2.4 Observations.

# 3. Pessoal Docente

- 3.1. Docente(s) responsável(eis) pela coordenação do ciclo de estudos.
- 3.1. Docente(s) responsável(eis) pela coordenação do ciclo de estudos.

Professor Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira

# 3.3 Equipa docente do ciclo de estudos (preenchimento automático)

### 3.3. Equipa docente do ciclo de estudos / Study programme's teaching staff

Nome / Name	Categoria / Category	Grau / Especialista Degree / Specialist	Área científica / Scientific Area	Regime de tempo / Employment link	Informação/ Information
Ana Cristina Malheiro Casimiro	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
Ana Margarida Fernandes Ribeiro	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
António José Mesquita da Cunha Machado Malheiro	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Álgebra, Lógica e Fundamentos	100	Ficha submetida
Carla Maria Gonçalves Ferreira	Professor Associado ou equivalente	Doutor	PhD in Computer Science	100	Ficha submetida
Carlos Manuel Agra Coelho	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	Bio-Estatística	100	Ficha submetida
Cláudio António Raínha Aires Fernandes	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Análise Funcional	100	Ficha submetida
Elvira Júlia Conceição Matias Coimbra	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
Filipe José Gonçalves Pereira Marques	Professor Associado ou	Doutor	Matemática - Especialidade de Estatística	100	Ficha submetida

-	,			,		
	Gonçalo Jorge Trigo Neri Tabuada	equivalente Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Algebra-Matematica	100	Ficha submetida
	Gregoire Marie Jean Bonfait	Professor Associado ou equivalente	Doutor	Física da Materia condensada	100	Ficha submetida
	Herberto de Jesus da Silva	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	João Filipe Lita da Silva	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática, especialidade de Estatística	100	Ficha submetida
	João Jorge Ribeiro Soares Gonçalves de Araújo	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	João Pedro Bizarro Cabral	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática - Geometria e Topologia	100	Ficha submetida
	Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	José Maria Nunes de Almeida Gonçalves Gomes	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Analise Matematica	100	Ficha submetida
	Júlia Maria Nunes Loureiro Vaz de Carvalho	Professor Associado ou equivalente	Doutor	Matemática; especialidade de Álgebra, Lógica e Fundamentos	100	Ficha submetida
	Luís Manuel Trabucho de Campos	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	Engineering Mechanics	100	Ficha submetida
	Luís Pedro Carneiro Ramos	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	Magda Stela de Jesus Rebelo	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	Manuel Messias Rocha de Jesus	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Álgebra, Lógica e Fundamentos/Matemática	100	Ficha submetida
	Maria Cecília Perdigão Dias da Silva	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática/ Álgebra	100	Ficha submetida
	Maria Fernanda de Almeida Cipriano Salvador Marques	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Análise Matemática/Matemática	100	Ficha submetida
	Maria Paula Pires dos Santos Diogo	Professor Catedrático ou equivalente	Doutor	História da Ciência e da Tecnologia- Epistemologia das Ciências	100	Ficha submetida
	Miguel dos Santos Fonseca	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	Nelson Fernando Chibeles Pereira Martins	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Engenharia de Sistemas	100	Ficha submetida
	Oleksiy Karlovych	Professor Associado ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	Pedro Alexandre da Rosa Corte Real	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Estatística	100	Ficha submetida
	Rogério Ferreira Martins	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
	Rui Manuel Rodrigues Cardoso	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Philosophy in Actuarial Mathematics and Statistics	100	Ficha submetida
	Ruy Araújo da Costa	Professor Associado ou equivalente	Doutor	Engenharia de Sistemas	100	Ficha submetida
	Susana Maria Marques Henriques Botelho Baptista	Professor Auxiliar ou equivalente	Doutor	Engenharia de Sistemas	100	Ficha submetida
	Vitor Hugo Bento Dias Fernandes	Professor Associado ou equivalente	Doutor	Matemática	100	Ficha submetida
					3300	

<sem resposta>

# 3.4. Dados quantitativos relativos à equipa docente do ciclo de estudos.

# 3.4.1. Total de docentes do ciclo de estudos (nº e ETI)

# 3.4.1.1. Número total de docentes.

33

### 3.4.1.2. Número total de ETI.

33

### 3.4.2. Corpo docente próprio do ciclo de estudos

### 3.4.2. Corpo docente próprio - docentes do ciclo de estudos em tempo integral / Number of teaching staff with a full time employment in the institution.\*

Corpo docente próprio / Full time teaching staff	N° de docentes / Staff number	% em relação ao total de ETI / % relative to the total FTE
Nº de docentes do ciclo de estudos em tempo integral na instituição / No. of teaching staff with a full time link to the institution:	33	100

### 3.4.3. Corpo docente do ciclo de estudos academicamente qualificado

### 3.4.3. Corpo docente academicamente qualificado – docentes do ciclo de estudos com o grau de doutor / Academically qualified teaching staff - staff holding a PhD

Corpo docente academicamente qualificado / Academically qualified teaching staff	N° de docentes (ETI) / Staff number in FTE	% em relação ao total de ETI* / % relative to the total FTE*
Docentes do ciclo de estudos com o grau de doutor (ETI) / Teaching staff holding a PhD (FTE):	33	100

### 3.4.4. Corpo docente do ciclo de estudos especializado

### 3.4.4. Corpo docente do ciclo de estudos especializado / Specialised teaching staff of the study programme

Corpo docente especializado / Specialized teaching staff		% em relação ao total de ETI* / % relative to the total FTE*	
Docentes do ciclo de estudos com o grau de doutor especializados nas áreas fundamentais do ciclo de estudos (ETI) / Teaching staff holding a PhD and specialised in the fundamental areas of the study programme	30	90.9090909091	33
Especialistas, não doutorados, de reconhecida experiência e competência profissional nas áreas fundamentais do ciclo de estudos (ETI) / Specialists not holding a PhD, with well recognised experience and professional capacity in the fundamental areas of the study programme	0	0	33

# 3.4.5. Estabilidade do corpo docente e dinâmica de formação

### 3.4.5. Estabilidade e dinâmica de formação do corpo docente / Stability and development dynamics of the teaching staff

Estabilidade e dinâmica de formação / Stability and tranning dynamics	Nº de docentes (ETI) / Staff number in FTE	% em relação ao total de ETI* / % relative to the total FTE*	-
Docentes do ciclo de estudos em tempo integral com uma ligação à instituição por um período superior a três anos / Teaching staff of the study programme with a full time link to the institution for over 3 years	31	93.9393939394	33
Docentes do ciclo de estudos inscritos em programas de doutoramento há mais de um ano (ETI) / FTE number of teaching staff registered in PhD programmes for over one year	0	0	33

# 4. Pessoal Não Docente

4.1. Número e regime de dedicação do pessoal não docente afeto à lecionação do ciclo de estudos.

Maria da Graça Nobre dos Santos – Assistente Técnica Maria Libânia Patrício Gaspar – Assistente Técnica Maria Deolinda da Conceição Teixeira Mata - Assistente Operacional

4.1. Number and employment regime of the non-academic staff allocated to the study programme in the present year.

Maria da Graça Nobre dos Santos - Technical Assistant Maria Libânia Patrício Gaspar - Technical Assistant Maria Deolinda da Conceição Teixeira Mata - Operational Assistant

### 4.2. Qualificação do pessoal não docente de apoio à lecionação do ciclo de estudos.

Maria da Graça Nobre dos Santos - 12º ano Maria Libânia Patrício Gaspar – 9º ano Maria Deolinda da Conceição Teixeira Mata - 6º ano

### 4.2. Qualification of the non-academic staff supporting the study programme.

Maria da Graça Nobre dos Santos -12th grade Maria Libânia Patrício Gaspar – 9th grade Maria Deolinda da Conceição Teixeira Mata - 6th grade

# 5. Estudantes

### 5.1. Estudantes inscritos no ciclo de estudos no ano letivo em curso

### 5.1.1. Estudantes inscritos no ciclo de estudos no ano letivo em curso

# 5.1.1. Total de estudantes inscritos.

### 5.1.2. Caracterização por género

### 5.1.1. Caracterização por género / Characterisation by gender

Género / Gender	%
Masculino / Male	58
Feminino / Female	42

### 5.1.3. Estudantes inscritos por ano curricular.

# 5.1.3. Estudantes inscritos por ano curricular / Students enrolled in each curricular year

Ano Curricular / Curricular Year	N° de estudantes / Number of students
1º ano curricular	36
2º ano curricular	32
3º ano curricular	38
	106

# 5.2. Procura do ciclo de estudos.

### 5.2. Procura do ciclo de estudos / Study programme's demand

	Penúltimo ano / One before the last year	Último ano/ Last year	: Ano corrente / Current year
N.º de vagas / No. of vacancies	30	25	25
N.º de candidatos / No. of candidates	334	270	227
N.º de colocados / No. of accepted candidates	30	25	25
N.º de inscritos 1º ano 1ª vez / No. of first time enrolled	30	25	25
Nota de candidatura do último colocado / Entrance mark of the last accepted candidate	153.6	162.2	169.2
Nota média de entrada / Average entrance mark	165.8	173.7	179.5

# 5.3. Eventual informação adicional sobre a caracterização dos estudantes

5.3. Eventual informação adicional sobre a caracterização dos estudantes.

5.3. Eventual additional information characterising the students.

# 6. Resultados

### 6.1. Resultados Académicos

#### 6.1.1. Eficiência formativa.

### 6.1.1. Eficiência formativa / Graduation efficiency

	Antepenúltimo ano / Two before the last year	Penúltimo ano / One before the last year	Último ano / Last year
N.º graduados / No. of graduates	13	21	19
N.º graduados em N anos / No. of graduates in N years*	6	9	15
N.º graduados em N+1 anos / No. of graduates in N+1 years	5	5	2
N.º graduados em N+2 anos / No. of graduates in N+2 years	0	5	2
N.º graduados em mais de N+2 anos / No. of graduates in more than N+2 years	2	2	0

### Pergunta 6.1.2. a 6.1.3.

6.1.2. Apresentar relação de teses defendidas nos três últimos anos, indicando, para cada uma, o título, o ano de conclusão e o resultado final (exclusivamente para cursos de doutoramento).

6.1.2. List of defended theses over the last three years, indicating the title, year of completion and the final result (only for PhD programmes).

n.a.

### 6.1.3. Comparação do sucesso escolar nas diferentes áreas científicas do ciclo de estudos e respetivas unidades curriculares.

O sucesso escolar dos alunos por unidade curricular e área científica é continuamente monitorizado. Por área científica, as taxas de aprovação médias de 2016/17, 2017/18 e 2018/19 são, respectivamente, as seguintes (aprovados/inscritos): Ciências Humanas e Sociais: 96.1%; Competências Complementares: 91.5%; Física: 79.5%; Informática: 77%; Matemática: 60.4%. A comparação do sucesso escolar entre diferentes áreas científicas deve ter em conta a correspondente repartição de ECTS. Em cada uma das áreas de Ciências Humanas e Sociais, de Competências Complementares e de Física, as unidades curriculares correspondem a 3 ECTS; na área de Informática a 6 ECTS; e na área de Matemática a 159 ECTS. (Os 6 ECTS remanescentes correspondem a uma unidade curricular de "qualquer área científica", que não Matemática.) Por outro lado, as unidades curriculares das áreas de Ciências Humanas e Sociais e Competências Complementares decorrem durante o período de 5 semanas entre os semestres ímpares e pares, e consequentemente em condições diferentes de funcionamento.

De referir ainda, que houve uma evolução significativa relativamente ao triénio anterior à submissão do último relatório, onde as taxas de aprovação observadas foram de:

Ciências Humanas e Sociais: 60%; Física: 57%; Informática: 34%; Matemática: 41%.

### 6.1.3. Comparison of the academic success in the different scientific areas of the study programme and the respective curricular units.

The academic success of the students per scientific area and curricular unit is continuously monitored.

The approval rates average in 2016/17, 2017/18 and 2018/19 were (approved/registered):

Humanities and Social Sciences: 96.1%; Transferable Skills: 91.5%; Physics: 79.5%; Informatics: 77%; Mathematics:

Comparison of the academic success among different scientific areas should take into account the amount of ECTS in each area. Curricular units from the areas of Humanities and Social Sciences; of Transferable Skills and of Physics adding up 3 ECTS, each; Informatics: 6 ECTS; and Mathematics: 159. (The remaining 6 ECTS correspond to a curricular unit from "any scientific area" not including Mathematics.) It should be also taken into account that curricular units of the areas of Humanities and Social Sciences and Transferable Skills take place during 5 weeks between odd and even semesters, and therefore with different functional conditions.

It is worth mentioning that there was an improvement on the academic success in period 2016/17 - 2018/19, with

respect over the three-year period prior to the submission of the last report, where the observed approval rates were: Humanities and Social Sciences: 60%; Physics: 57%; Informatics: 34%; Mathematics: 41%.

### 6.1.4. Empregabilidade.

# 6.1.4.1. Dados sobre desemprego dos diplomados do ciclo de estudos (estatísticas da DGEEC ou estatísticas e estudos próprios, com indicação do ano e fonte de informação).

Período 2010/2015:

TE: 100% PD: 0%

2016:

TE: 75% PD: 0%

2017:

TE: 62.5% PD: 0%

T.E: Taxa de Emprego = Nº de diplomados empregados / Nº de diplomados total

P.D: percentagem de desempregados = Nº de diplomados desempregados / Nº de diplomados total

# 6.1.4.1. Data on the unemployment of study programme graduates (statistics from the Ministry or own statistics and studies, indicating the year and the data source).

Period 2010/2015:

ER: 100% PU: 0%

2016:

ER: 75% PU: 0%

2017:

ER: 62.5% PU: 0%

ER: Employment rate = Nº of graduates employed / Nº of graduates

PU: percentage of unemployed = No. of graduates unemployed / N° of graduates

### 6.1.4.2. Reflexão sobre os dados de empregabilidade.

Os dados de empregabilidade indicam que não há desemprego entre os diplomados. As taxas de emprego (TE) inferiores a 100% em 2016 e em 2017 indicam que nem todos os diplomados estão empregados estando ocupados noutras atividades (e.g., continuação da formação académica).

### 6.1.4.2. Reflection on the employability data.

Data indicate that there is no unemployment among graduates. Employment rates (ER) below 100% in 2016 and in 2017 indicate that not all graduates are employed, and are engaged in other activities (e.g. further pursuing academic training).

# 6.2. Resultados das atividades científicas, tecnológicas e artísticas.

### 6.2.1. Centro(s) de investigação, na área do ciclo de estudos, em que os docentes desenvolvem a sua atividade científica

# 6.2.1. Centro(s) de investigação, na área do ciclo de estudos, em que os docentes desenvolvem a sua actividade científica / Research Centre(s) in the area of the study programme, where the teachers develop their scientific activities

Centro de Investigação / Research Centre	Classificação (FCT) / Mark (FCT)	IES /	N.º de docentes do ciclo de estudos integrados/ No. of integrated study programme's teachers	Observações / Observations
Centro de Matemática e	Muito	FCT	25	https://www.fct.unl.pt/investigacao/centro-
Aplicações /Centre of	Bom/Very	NOVA		de-matematica-e-aplicacoes

Mathematics and Applications (CMA)

### Pergunta 6.2.2. a 6.2.5.

6.2.2. Mapa-resumo de publicações científicas do corpo docente do ciclo de estudos em revistas internacionais com revisão por pares, livros ou capítulos de livros, ou trabalhos de produção artística, relevantes para o ciclo de estudos.

http://www.a3es.pt/si/iportal.php/cv/scientific-publication/formId/aa7d7b1a-0913-9011-b42d-5dada53743e7

6.2.3. Mapa-resumo de outras publicações relevantes, designadamente de natureza pedagógica:

http://www.a3es.pt/si/iportal.php/cv/other-scientific-publication/formId/aa7d7b1a-0913-9011-b42d-5dada53743e7

6.2.4. Atividades de desenvolvimento tecnológico e artístico, prestação de serviços à comunidade e formação avançada na(s) área(s) científica(s) fundamental(ais) do ciclo de estudos, e seu contributo real para o desenvolvimento nacional, regional e local, a cultura científica e a ação cultural, desportiva e artística.

O Departamento de Matemática (DM) participa com regularidade em programas nacionais e internacionais de divulgação de ciência junto dos jovens e da sociedade em geral, como sejam os estágios de Verão ligados ao programa "Ciência Viva" ou a "Noite dos Investigadores".

Adicionalmente, o DM tem atividades regulares de divulgação da importância da Matemática junto das escolas:

- O grupo divMAT (https://sites.google.com/site/divmatfct) tem como finalidade a divulgação da Matemática através de diversas iniciativas destinadas a alunos e professores do ensino secundário, visitando escolas e recebendo grupos de escolas nas instalações da FCT NOVA. Em particular, participa na organização do ProfNova, encontro destinado a professores do ensino secundário que contempla uma componente de formação associada à frequência de cursos, creditada para efeitos de progressão na carreira.
- O ClubeMath (http://eventos.fct.unl.pt/clubemath) destina-se a jovens do ensino básico e secundário e funciona, com alunos inscritos, em 7 sessões anuais realizadas aos sábados, nas instalações da FCT NOVA.
- A MatNova e a MathIngenious são escolas de Verão em Matemática, destinadas a alunos de excelência do ensino secundário.
- Por ocasião da ExpoFCT, milhares de alunos do ensino secundário visitam a FCT NOVA e o DM.

É ainda frequente o envolvimento de docentes do DM na organização de exposições e ciclos de palestras dedicados ao público em geral, de que é exemplo o ciclo de seis palestras intitulado "Almada Negreiros e a Matemática", que teve lugar em 2016/17 na FCT NOVA.

Desde 1983 o Departamento de Matemática já formou mais de mil licenciados, mestres e doutores em Matemática. Estes têm exercido as suas atividades profissionais como professores no Ensino Secundário e Básico, docentes no Ensino Superior e como quadros superiores em Médias e Grandes Empresas nos sectores da gestão, estatística, finança e retalho, em seguradoras, bancos, empresas gestoras de fundos de pensões e de investimento, empresas ligadas à gestão da informação, consultoras e grandes retalhistas, apenas para citar alguns exemplos.

6.2.4. Technological and artistic development activities, services to the community and advanced training in the fundamental scientific area(s) of the study programme, and their real contribution to the national, regional or local development, the scientific culture and the cultural, sports or artistic activity.

The Department of Mathematics (DM) is regularly enrolled in national and international programs related to the promotion of science to young people or general society, like is the case of "Live Science" or "European Night of Researchers".

Additionally, the DM promotes regular activities to disseminate the importance of Mathematics to schools:

- The group divMAT (https://sites.google.com/site/divmatfct) aims at the dissemination of Mathematics through several initiatives directed to students and high school teachers, visiting schools and hosting groups from schools at FCT/NOVA. In particular, divMat participates in the organization of ProfNova, meeting dedicated to high school teachers, which contemplates a component of advance training through courses, credit to career progression.
- The ClubeMath (http://eventos.fct.unl.pt/clubemath) aimed at young basic and secondary school students, works through enrollment, in 7 annual sessions, held on Saturdays, at the premises of FCT NOVA.
- The MatNova and MathIngenious are Summer schools in Mathematics, aimed at excellent students in secondary education.
- On the occasion of ExpoFCT, thousands of high school students visit FCT NOVA and the DM.

It is also common professors from DM to be enrolled in the organization of exhibitions and cycles of lectures in Mathematics dedicated to the general public, as is the case of the six lectures cycle entitled "Almada Negreiros and Mathematics", which took place in 2016/17, at FCT NOVA.

Since 1983 the Department of Mathematics has trained over a thousand graduates, MSc and PhD in Mathematics. They exercise their professional activities as teachers in Basic and Secondary Education, or professors at Universities and Polytechnical Schools, and executives in Medium and Large companies in the areas of management, statistics, finance and retail, in insurance companies, banks, pension funds management and investment companies, data management companies, consultancy and big retailers, just to give some examples.

6.2.5. Integração das atividades científicas, tecnológicas e artísticas em projetos e/ou parcerias nacionais e internacionais, incluindo, quando aplicável, indicação dos principais projetos financiados e do volume de financiamento envolvido.

Os docentes do Departamento da Matemática (DM) são, na generalidade, membros do Centro de Matemática e Aplicações. Este centro obteve na última avaliação realizada pela FCT a classificação de "Muito Bom". Presentemente aloja 8 projectos financiados, dos quais se destacam as áreas de álgebra (232,109.28€), otimização não linear (233,472.11€) e estatística (121,206.75€).

Os docentes do DM dispõem ainda de diversas colaborações centíficas a nível nacional e internacional (e.g.MIT, IHES-Paris Saclay, IMPA, St. Andrews).

Destaca-se a preocupação dos docentes de envolver desde cedo os estudantes na atividade científica, seja através de tutorias no programa "Novos Talentos em Matemática", da Fundação Calouste Gulbenkian, em seminários de investigação ao nível da licenciatura, como é o caso do "Seminário de Análise Matemática para Alunos de Licenciatura", ou na unidade curricular "Projeto de Iniciação à Investigação Científica", que permite ao estudante um primeiro contacto com a investigação.

6.2.5. Integration of scientific, technologic and artistic activities in projects and/or partnerships, national or international, including, when applicable, the main projects with external funding and the corresponding funding values.

The professors of the Department of Mathematics (DM) are, in general, members of the Center of Mathematics and Applications (CMA). In the last evaluation performed by FCT, this research center reached the classification of "Very Good". Currently, it hosts 8 funded projects, some in the area of algebra (232,109.28€), nonlinear optimization (233,472.11€) and statistics (121,206.75€).

The professors of DM have several national and international scientific collaborations (e.g. MIT, IHES-Paris Saclay, IMPA, St. Andrews).

There is an attempt of professors to engage students in scientific activities from early academic years, be it with tutorial activity framed in the program "New Talents in Mathematics", promoted by Calouste Gulbenkian Foundation, with research seminars at an undergraduate level, as is the case of the "Seminar in Mathematical Analysis for Undergraduate Students", or in the curricular unit "Project of Introduction to Scientific Research".

### 6.3. Nível de internacionalização.

#### 6.3.1. Mobilidade de estudantes e docentes

### 6.3.1. Mobilidade de estudantes e docentes / Mobility of students and teaching staff

	%	
Alunos estrangeiros matriculados no ciclo de estudos / Foreign students enrolled in the study programme	1	
Alunos em programas internacionais de mobilidade (in) / Students in international mobility programmes (in)	3	
Alunos em programas internacionais de mobilidade (out) / Students in international mobility programmes (out)	0	
Docentes estrangeiros, incluindo docentes em mobilidade (in) / Foreign teaching staff, including those in mobility (in)	4	
Mobilidade de docentes na área científica do ciclo de estudos (out) / Teaching staff mobility in the scientific area of the study (out)	4	

- 6.3.2. Participação em redes internacionais com relevância para o ciclo de estudos (redes de excelência, redes Erasmus).
- 6.3.2. Participação em redes internacionais com relevância para o ciclo de estudos (redes de excelência, redes Erasmus). Presentemente, o Departamento de Matemática dispõe de acordos Erasmus com um total de 23 universidades nos seguintes países: Alemanha, Bulgária, Espanha, França, Holanda, Itália, Lituânia, Polónia e Turquia.
- 6.3.2. Participation in international networks relevant for the study programme (excellence networks, Erasmus networks,

Currently, the Department of Mathematics has Erasmus partnerships with a total of 23 universities in the following countries: Germany, Bulgaria, Spain, France, Holland, Italy, Lithuania, Poland, and Turkey.

# 6.4. Eventual informação adicional sobre resultados.

6.4. Eventual informação adicional sobre resultados.

n.a.

6.4. Eventual additional information on results.

# 7. Organização interna e mecanismos de garantia da qualidade

7.1 Existe um sistema interno de garantia da qualidade certificado pela A3ES

7.1. Existe um sistema interno de garantia da qualidade certificado pela A3ES (S/N)?

Se a resposta for afirmativa, a Instituição tem apenas que preencher os itens 7.1.1 e 7.1.2, ficando dispensada de preencher as secções 7.2.

Se a resposta for negativa, a Instituição tem que preencher a secção 7.2, podendo ainda, se o desejar, proceder ao preenchimento facultativo dos itens 7.1.1 e/ou 7.1.2.

7.1.1. Hiperligação ao Manual da Qualidade.

https://www.fct.unl.pt/sites/default/files/manual\_da\_qualidade\_2018.pdf

7.1.2. Anexar ficheiro PDF com o último relatório de autoavaliação do ciclo de estudos elaborado no âmbito do sistema interno de garantia da qualidade (PDF, máx. 500kB).

<sem resposta>

# 7.2 Garantia da Qualidade

7.2.1. Mecanismos de garantia da qualidade dos ciclos de estudos e das atividades desenvolvidas pelos Serviços ou estruturas de apoio aos processos de ensino e aprendizagem, designadamente quanto aos procedimentos destinados à recolha de informação (incluindo os resultados dos inquéritos aos estudantes e os resultados da monitorização do sucesso escolar), ao acompanhamento e avaliação periódica dos ciclos de estudos, à discussão e utilização dos resultados dessas avaliações na definição de medidas de melhoria e ao acompanhamento da implementação dessas medidas.

A avaliação dos Ciclos de Estudo (CE) assume especial importância para a prossecução da promoção e verificação da qualidade do Ensino e Aprendizagem. Para tal encontram-se descritos em procedimentos os processos de monitorização das Unidades Curriculares (UC) e dos CE. Nestes procedimentos encontram-se bem definidas e especificadas as funções de todos os intervenientes da comunidade académica, nomeadamente estudantes, docentes, regente e responsável da UC, coordenador e comissão científica (CC) do CE, presidente do departamento responsável pela UC e pelo CE, Subdiretor para os Assuntos Pedagógicos (SAP), Conselho de Gestão (CG) e Diretor.

- O processo de monitorização semestral do CE apoia-se em 2 conjuntos de dados sobre as UC:
- 1) Os dados subjetivos que resultam da perceção dos estudantes e docentes são obtidos através da resposta aos seguintes Questionários de Avaliação das Perceções dos:
- -Estudantes sobre o Funcionamento das UC e do Desempenho Global dos Docentes (QA);
- -Docentes sobre as UC;
- -Estudantes sobre o Desempenho Individual dos Docentes (QB).
- 2) Os dados objetivos que se referem ao desempenho obtido pelos estudantes nas UC:
- -Sucesso escolar;
- -Nível de eficiência formativa;
- -Média das classificações obtidas pelos estudantes na UC.
- O Sistema de Gestão Académica (CLIP) apoia todo o processo de monitorização e avaliação. Os questionários são respondidos online no CLIP, o qual também realiza o tratamento estatístico. Os dados objetivos são extraídos do CLIP. Os relatórios da UC e do CE que integram os dados anteriores são gerados automaticamente pelo CLIP, podendo os diversos intervenientes da comunidade académica aceder online ao respetivo relatório.

Com base nos critérios definidos as UC são classificadas como inadequadas, i.e. UC que necessitam de uma análise mais aprofundada, se o valor médio das respostas a uma das questões do questionário QA se situar abaixo do valor crítico ou se os indicadores de desempenho se situarem abaixo dos limiares críticos definidos.

No final de cada semestre o Coordenador e a CC do CE elaboram o Relatório Semestral do CE o qual inclui (1) a análise dos dados referidos anteriormente, (2) um comentário geral sobre o funcionamento do CE nesse semestre, indicando pontos fortes e pontos fracos e (3) propostas de ações de melhoria ou modificações. Este relatório é analisado pelo SAP e submetido ao CG. Este avalia as propostas e podem sugerir novas ações de melhoria. As ações de melhoria a implementar devem incluir medidas que permitam corrigir as situações problemáticas. Sempre que surjam situações inadequadas, de cariz repetitivo, deve ser sujeita a um processo de auditoria. Na realização da

auditoria, a equipa auditora deve consultar os Responsáveis envolvidos. Deste processo, resulta um relatório com uma síntese das causas apuradas para o problema e um conjunto de conclusões e recomendações.

O CE é também submetido a um a avaliação (anual) mais detalhada, a qual é sintetizada no Relatório Global de Monitorização do CE.

7.2.1. Mechanisms for quality assurance of the study programmes and the activities promoted by the services or structures supporting the teaching and learning processes, namely regarding the procedures for information collection (including the results of student surveys and the results of academic success monitoring), the monitoring and periodic assessment of the study programmes, the discussion and use of the results of these assessments to define improvement measures, and the monitoring of their implementation.

The evaluation of the Study Cycles is of particular importance for the continuation of the promotion and verification of the Teaching and Learning quality. To this end, the monitoring processes of Curricular Units and Study Cycles are described in procedures. In these procedures, are well defined and specified the functions of all the actors of the academic community, namely students, teachers, regent and responsible of the Curricular Unit, coordinator and scientific commission of the Study Cycle, president of the department responsible for the Curricular Unit and for the Study Cycle, Vice-Dean for Pedagogical Affairs, Management Board and Dean.

The biannual monitoring process of the Study Cycles is based on two sets of data on the Curricular Units:

- 1) Subjective data that result from the students 'and teachers' perception, and are obtained through the answer to the following Questionnaires of Evaluation of the Perceptions of:
- Students on the Functioning of Curricular Unit and the Global Performance of Teachers (QA);

- Teachers about the Curricular Units:
- Students on the Individual Performance of Teachers (QB).
- 2) Objective data that refer to the performance achieved by students in the Curricular Units:
- School success:
- Level of formative efficiency:
- Average of the classifications obtained by the students in the Curricular Units.

The Academic Management System (CLIP) supports the entire monitoring and e valuation process. The questionnaires are answered online at the CLIP, which also performs the statistical treatment. The objective data is extracted from the CLIP. The reports of the Curricular Unit and the Study Cycle that integrate the previous data are generated automatically by the CLIP, and the various actors of the academic community can access online the respective report. Based on the criteria defined, the Curricular Units are classified as inadequate, that is, Curricular Units that need further analysis if the average value of the answers to one of the questions in the QA questionnaire is below the critical value, or if the performance indicators are below the defined critical thresholds.

At the end of each semester, the Coordinator and the Scientific Committee of the Study Cycle prepare the Semester Report of the Study Cycle which includes (1) the analysis of the data referred to above, (2) a general comment on the functioning of the Study Cycle in this semester, indicating strengths and weaknesses and (3) proposals for improvement actions or modifications. This report is reviewed by Vice-Dean for Pedagogical Affairs and submitted to the Management Council. It evaluates the proposals and may suggest further improvement actions.

The improvement actions to be implemented should include measures to correct the problem situations. Where there are inappropriate situations of a repetitive nature, they should be subject to an audit procedure. When conducting the audit, the audit team should consult with those responsible.

From this process, a report summarizes the causes of the problem and a set of conclusions and recommendations. The Study Cycle is also subjected to a more detailed (annual) assessment, which is summarized in the Global Study Cycle Monitoring Report.

### 7.2.2. Indicação da(s) estrutura(s) e do cargo da(s) pessoa(s) responsável(eis) pela implementação dos mecanismos de garantia da qualidade dos ciclos de estudos.

Sendo um processo transversal a toda a instituição, são vários os responsáveis pela implementação dos mecanismos de garantia da qualidade do Ensino, assim:

1-ao nível da UNL:

- Pró-Reitora responsável pela qualidade do ensino;
- Conselho da Qualidade do Ensino da UNL: Assegurar o funcionamento do sistema de garantia da qualidade do ensino na UNL.

2-ao nível da FCT:

- -.Diretor: Orientar todas as estruturas orgânicas e funcionais para os princípios da garantia da qualidade.
- Subdiretor responsável pela garantia da qualidade do ensino na FCT NOVA.
- Comissão da Qualidade do Ensino da FCT NOVA: Assegurar o funcionamento do sistema de garantia da qualidade do ensino.
- Coordenador e Comissão Científica do CE e Presidente do Departamento responsável pelo CE e UC: processo de autoavaliação dos ciclos de estudos.
- Divisão de Gestão e Planeamento da Qualidade: Apoiar a implementação de práticas da qualidade.
- Delegados da Qualidade (DQ): Promover a implementação de práticas da qualidade.

# 7.2.2. Structure(s) and job role of person(s) responsible for implementing the quality assurance mechanisms of the study

Being a transversal process to the whole institution, there are several responsible for the implementation of the Teaching quality assurance mechanisms, thus:

1- at UNL level:

- Pro-Rector responsible for teaching quality:
- Teaching Quality Council of UNL: Ensure the functioning of NOVA's Teaching Quality Assurance System.
- Dean: To guide all organic and functional structures in accordance with the principles of quality assurance.
- Vice-Dean responsible for Teaching quality assurance at FCT NOVA.
- FCT NOVA Teaching Quality Committee: Ensure the functioning of the teaching quality assurance system.
- Coordinator and Scientific Committee of the CE and Chair of the Department responsible for the EC and UC: process of self-evaluation of study cycles.
- Planning and Quality Management Division (DPGQ): Support the implementation of quality practices.
- Quality Delegates (DQ): Promote the implementation of quality practices.

### 7.2.3. Procedimentos de avaliação do desempenho do pessoal docente e medidas conducentes à sua permanente atualização e desenvolvimento profissional.

O Regulamento da FCT NOVA relativo à Avaliação do Desempenho (RAD) têm por objeto o desempenho dos docentes, visando avaliá-lo em função do mérito e melhorar a sua qualidade. A avaliação de desempenho abrange todos os docentes das escolas envolvidas, tem em conta a especificidade de cada área disciplinar e considera todas as vertentes da respetiva atividade: a) Docência; b) Investigação científica, desenvolvimento e inovação; c) Tarefas administrativas e de gestão académica; d) Extensão universitária, divulgação científica e prestação de serviços à comunidade. Os resultados da avaliação têm consequências no posicionamento remuneratório, contratação por tempo indeterminado e renovações de contratos. Para a permanente atualização dos docentes contribui, desde logo, a implementação de uma política de estímulo à investigação de qualidade com o objetivo de incentivar projetos com potencial de investigação e reconhecer o mérito dos investigadores mais destacados.

### 7.2.3. Procedures for the assessment of teaching staff performance and measures for their continuous updating and professional development.

The FCT NOVA Regulation on Performance Assessment (RAD) are aimed at the performance of the teachers, in order to assess it on the basis of merit and to improve its quality. The performance evaluation covers all the teachers of the schools involved, takes into account the specificity of each subject area and considers all aspects of their activity: a) Teaching; (b) scientific research, development and innovation; c) Administrative and academic management tasks; d) University extension, scientific dissemination and service delivery to the community. The results of the evaluation have consequences on the remuneration positioning, contract renewals and tenure. For the permanent updating of the teaching staff, it mainly contributes the implementation of a policy to stimulate research quality with the goal of encouraging projects with research potential and recognizing the merit of the most outstanding researchers.

### 7.2.3.1. Hiperligação facultativa ao Regulamento de Avaliação de Desempenho do Pessoal Docente. https://dre.pt/application/conteudo/107752661

### 7.2.4. Procedimentos de avaliação do pessoal não-docente e medidas conducentes à sua permanente atualização e desenvolvimento profissional.

A avaliação do pessoal não docente é efetuada segundo o SIADAP – Sistema Integrado de Avaliação de Desempenho da Administração Pública - o qual assenta na definição de objetivos institucionais que são desdobrados pela organização. Os objetivos a atingir por cada funcionário, administrativo ou técnico, são definidos no início de cada biénio e estão alinhados com os objetivos estratégicos da instituição. A progressão do funcionário, a existir, dependerá da avaliação bienal que é feita em função do cumprimento das metas fixadas.

### 7.2.4. Procedures for the assessment of non-academic staff performance and measures for their continuous updating and professional development.

The performance of non-academic staff is based on SIADAP – Integrated System for Performance Evaluation of Public Administration. SIADAP requires the definition and deployment of institutional objectives. The goals to be attained by the non-academic staff are aligned with the institution strategic objectives and are defined at the beginning of each biennium. The career progression of staff depends on their biennial evaluation, which is based on the degree of accomplishment of the pre-defined goals.

### 7.2.5. Forma de prestação de informação pública sobre o ciclo de estudos.

Informação detalhada sobre a Licenciatura em Matemática encontra-se disponível em https://www.dm.fct.unl.pt/ensino/licenciatura-em-matematica. Esta informação faz ainda parte do Guia de Cursos distribuído pela FCT/NOVA aos estudantes do ensino secundário nas diferentes ações de divulgação de oferta educativa em que participa (por exemplo Futurália ou ExpoFCT).

# 7.2.5. Means of providing public information on the study programme.

Detailed information about the study programme in Mathematics can be found at https://www.dm.fct.unl.pt/ensino/licenciatura-em-matematica. This information is also part of the Study Programme Guide distributed by FCT/NOVA to the high school students in the different actions in which participates to promote the educational offer (as example, Futurália or ExpoFCT).

### 7.2.6. Outras vias de avaliação/acreditação nos últimos 5 anos.

n.a.

### 7.2.6. Other assessment/accreditation activities over the last 5 years.

n.a.

# 8. Análise SWOT do ciclo de estudos e proposta de ações de melhoria

# 8.1 Análise SWOT global do ciclo de estudos

### 8.1.1. Pontos fortes

1) A UNL, e em particular a FCT NOVA, tem vindo a afirmar-se como uma instituição de ensino superior universitário de referência, a nível nacional e internacional. Os seus ciclos de estudos são reconhecidos como conferindo uma formação de qualidade, relevante para o mercado de trabalho e para a prossecução de uma carreira científica. A Licenciatura em Matemática não é uma exceção, como é evidente pelo percurso profissional de vários alumni, que atualmente ocupam posições de destaque em diversas empresas, continuando a manter uma forte ligação ao Departamento de Matemática, colaborando ativamente nas iniciativas de divulgação do curso.

- 2) Para a qualidade desta formação contribui o corpo docente associado a este ciclo de estudos. Na generalidade, este é um corpo docente jovem e altamente qualificado, associado a centros de investigação de qualidade, sendo responsável por produção científica de qualidade reconhecida a nível internacional.
- 3) A Licenciatura em Matemática concede uma sólida e rigorosa formação de base em Matemática. Os diplomados adquirem um conjunto de competências e a preparação adequada ao prossequimento de estudos num segundo ciclo.

### 8.1.1. Strengths

- 1) The UNL, and in particular FCT, has increased its strength as a reference university, at national and international levels. Study programs of this school are recognized as conferring a quality education, relevant both for job market and for pursuing a scientific career. The study program in Mathematics is not an exception, as it is clear when analyzing the professional career of some alumni, which currently occupy top-level positions in different companies, continuing to have a strong bound with the Department of Mathematics, actively collaborating in the promotion activities related to the study program.
- 2) Partial responsible for this quality are the professors associated to this study program. In general, these are a young and highly qualified team, integrated in high quality research centers, and responsible for highly quality scientific outputs, recognized at an international level.
- 3) The study program in Mathematics grants a solid and rigorous base formation in Mathematics. Graduate students acquire a set of skills and an adequate preparation to pursue studies in a second study cycle.

### 8.1.2. Pontos fracos

- 1) Atualmente a Licenciatura em Matemática encontra-se estruturada num conjunto de cinco primeiros semestres com um currículo obrigatório, sendo as opções curriculares restritas ao sexto semestre, também considerado como o semestre propício a atividades Erasmus. Tal resulta numa estrutura curricular rígida, dificultando a mobilidade e condicionando as opções de UC de outros ciclos de estudo às que estão em funcionamento nos semestres pares.
- 2) Alguns dos conteúdos do 1.º semestre do plano curricular atual pressupõem uma maturidade científica e uma capacidade de abstração que a generalidade dos estudantes que ingressam no curso não evidencia.
- 3) Alguns conteúdos são utilizados em certas UC antes de serem introduzidos nas UC naturais (e.g., integral -Análise/Probabilidades; teorema espectral – Álgebra Linear/Geometria).
- 4) Conteúdos relevantes de Geometria, que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático do estudante, não integram os programas das UC do atual plano curricular. A UC atual de Geometria, do 2.º semestre, trata Geometria Analítica.
- 5) Os estudantes da Licenciatura em Matemática usufruem muito pouco da oferta formativa dos outros cursos da faculdade.

### 8.1.2. Weaknesses

- 1) Currently, the study program in Mathematics is structured in five first semesters with compulsory curricular units, being the sixth semester dedicated to optional curricular units and the Erasmus program. Consequently, the curricular structure is rigid, causing difficulties to mobility and conditioning the options to curricular units available at the Spring
- 2) Some subjects of the first semester require a level of scientific maturity and abstraction skills that are not found in most students that enter the course.
- 3) Subjects are used in some CUs before being introduced at the natural CUs (e.g., integral Analysis/Probabilities; matrix spectral theorem - Linear Algebra/Geometry).
- 4) Important Geometry subjects that contribute to the development of the mathematical reasoning are not included in the current CUs programs. CU Geometry of semester 2 is devoted to Analytic Geometry.
- 5) Students from Mathematics almost do not profit from the CUs of other courses.

### 8.1.3. Oportunidades

- 1) A procura do mercado de trabalho por profissionais com uma sólida formação em Matemática tem aumentado nos últimos anos, fruto do interesse que existe na extração de informação a partir de dados. Esta tendência irá continuar a sentir-se nos próximos anos, motivando um número crescente de estudantes que concluem o Ensino Secundário a considerarem uma Licenciatura em Matemática como uma excelente base de formação superior.
- 2) Como consequência, e também como resultado do investimento que tem sido feito na divulgação do curso e nas saídas profissionais, nos últimos anos a Licenciatura em Matemática tem preenchido todas as vagas, com classificações de entrada dos estudantes cada vez mais elevadas. Este aumento da qualidade dos alunos é uma oportunidade para captação de estudantes com um perfil muito interessante para segundos ou terceiros ciclos de estudos.
- 3) A existência de investigação e formação em certas áreas específicas (e.g., atuariado), poderá proporcionar um elemento diferenciador da oferta formativa da Licenciatura.
- 4) O fim dos mestrados integrados, previsto para o ano letivo 2021/22, poderá ter impacto na escolha de um primeiro ciclo de estudos, podendo um maior número de estudantes (consequentemente contribuindo para o aumento da qualidade dos alunos colocados) vir a considerar a possibilidade de frequentar uma Licenciatura em Matemática, eventualmente perspetivando prosseguir a formação numa outra área.

- 5) O fim dos mestrados integrados proporcionou uma reflexão generalizada nas escolas de ciências e engenharias (como a FCT NOVA) sobre a função das licenciaturas. A opção de considerar que o primeiro ciclo não visa a formação profissional, mas sim é dirigido à prossecução de estudos especializados em segundo ciclo, evidencia a oportunidade de considerar a formação de um matemático concebida em 5 anos, em conformidade com os outros cursos da escola, e a Licenciatura como uma formação prévia em Matemática.
- 6) Do ponto de vista logístico, a FCT NOVA localiza-se em Almada, fora de Lisboa mas a distância curta de Lisboa. Por contraste com o que se pratica e deverá continuar a praticar-se em Lisboa nos próximos anos, o preço do alojamento é bastante razoável nesta região, o que poderá ser um fator de preferência para estudantes deslocados e internacionais relativamente à opção por cursos idênticos em Lisboa.

### 8.1.3. Opportunities

- 1) In the last years, the demand of the labor market for professionals with a solid background in Mathematics has increased, as part of the lying interest in the extraction of information from data. This tendency will continue for the next years, motivating students to consider a study program in Mathematics as an excellent basis of superior
- 2) Thus and also as result of the investment in the promotion of the study program and the corresponding professional careers, in the last years the study program in Mathematics was able to fulfill all the student positions, with a raise in the grades level. This increase of the student quality is an opportunity to attract students with a very interesting profile for second or third study cycles.
- 3) The existence of research and capability for education training in certain specific areas (such as actuarial sciences), can be a differentiating element for the course.
- 4) The extinction of study cycles corresponding to integrated masters, expected to change in 2021/2022 to 3 (undergraduate) + 2 (MSc) year courses, may have an impact in the choice of a first study cycle, possibly leading to an increase in the number of students (and consequently contributing for the increase in the quality of the students accepted) that consider the possibility of a first study program in Mathematics, complemented with a second study cycle in a different formation area.
- 5) The extinction of study cycles corresponding to integrated masters motivated a debate in Sciences and Engineering schools (such as FCT NOVA) about the role of undergraduate courses. The option for considering that a first cycle is not enough to be ready for a profession, but rather to continue to pursuit a MSc, entails the opportunity of envisage the mathematical background as a 5 year academic training, and the study program in Mathematics at the undergraduate level as a preliminary Mathematical education training.
- 6) From a logistic point of view, FCT NOVA is located in Almada, outside Lisbon but at a short distance from it. Comparing to what is currently practiced in Lisbon, and that should continue for the next years, lodging is very affordable, what could result in a preferential factor for students living outside their homes or for international students, when comparing similar study programmes in Lisbon.

### 8.1.4. Constrangimentos

- 1) A FCT NOVA encontra-se na área da grande Lisboa, competindo diretamente com outras instituições de ensino que têm ciclos de estudo com uma forte componente em Matemática.
- 2) A atual reestruturação dos mestrados integrados em licenciaturas e mestrados acarreta um nível de incerteza relativo às escolhas dos candidatos, que poderá vir a criar oportunidades, mas eventualmente poderá levar os estudantes a optar por primeiros ciclos de estudo noutras áreas, com implementação mais imediata no mercado de trabalho, correspondendo também a formações de três anos.
- 3) O custo de licenças de software proprietários, assim como as limitações orçamentais conduzem a algumas restrições de recursos, nomeadamente ao nível dos laboratórios computacionais. A utilização em aulas de algum software poderá ficar comprometida.

### 8.1.4. Threats

- 1) FCT NOVA is located in the area of Lisbon, directly competing with other academic institutions with study programs with a strong component in Mathematics.
- 2) The undergoing restructuration of the integrated masters into study programs for undergraduate students and masters can generate opportunities but also raises a level of uncertainty related to the students options, which could chose a first study cycle in different areas, with a good penetration in the labor market, also corresponding to a three years formation.
- 3) The price of software licenses and budget constraints may cause some restrictions in terms of resources, namely at the computational laboratory level. The use in classes of some type of software may be compromised.

### 8.2. Proposta de ações de melhoria

### 8.2. Proposta de ações de melhoria

### 8.2.1. Ação de melhoria

- 1) O plano curricular proposto inclui, nos semestres 5 e 6, um conjunto bastante amplo de UC optativas, onde figuram UC da recente Licenciatura em Matemática Aplicada à Gestão do Risco (LMAGR), e duas UC obrigatórias de áreas que não Matemática. Tal irá contribuir para colmatar os pontos identificados como fraquezas 1) e 5).
- 2) O plano curricular proposto para os dois primeiros anos altera a forma como é ministrado o ensino das Análises Matemáticas. Destaca-se a criação de duas UC de Cálculo (Cálculo I e Cálculo II, nos 1.º e 2.º semestres, respetivamente), constituindo os conteúdos mais abstratos da Análise Matemática matéria de estudo aprofundado em quatro UC obrigatórias, lecionadas a partir do segundo semestre. A nova organização dos conteúdos de Análise, inclui a criação no 4.º semestre da UC Equações Diferenciais, que reúne conteúdos atualmente lecionados nas UC Análise Matemática III e Análise Matemática IV, dos 3.º e 4.º semestres, respectivamente. A estruturação proposta reforça e acomoda coerentemente os conteúdos da Análise Matemática nos dois primeiros anos e, simultaneamente, permite mitigar os pontos identificados como fraquezas 2) e 3). Os estudantes que não se enquadram no ponto identificado como fraqueza 2) (i.e., que evidenciem maturidade científica e capacidade de abstração), poderão, logo que ingressem no curso, selecionar áreas mais fundamentais (e.g., teoria dos conjuntos, teoria dos números) nos projetos oferecidos na UC Projetos em Matemática do 1.º semestre.
- 3) O programa proposto para a UC Geometria é direcionado para o estudo das geometrias axiomáticas, sendo a Geometria Analítica incorporada nas UC de Álgebra Linear, agora com as designações de Álgebra Linear e Geometria Analítica I e Álgebra Linear e Geometria Analítica II. Desta forma corrige-se o ponto identificado como fraqueza 4).
- 4) A proposta de existência de três perfis (Matemática; Estatística e Gestão do Risco; e Investigação Operacional) obtidos a partir da escolha de um conjunto coerente de UC optativas no terceiro ano i) organiza coerentemente a oferta de UC optativas, mitigando o ponto identificado como fraqueza 1); ii) estabelece um elemento de ligação com estudos aprofundados de segundo ciclo, em consonância com o ponto 5) das Oportunidades da análise SWOT; iii) evidencia áreas em que os docentes do Departamento de Matemática apresentam maior qualidade científica e de atividades de ensino, constituindo um elemento diferenciador desta licenciatura, em conformidade com o ponto 3) das Oportunidades da análise SWOT; iv) não condiciona a qualidade da formação básica, que é garantida pelas UC dos dois primeiros anos; e v) não limita uma cultura científica vasta, pois existe um número significativo de ECTS a realizar, no terceiro ano, que não condiciona o perfil de escolha dos estudantes.

### 8.2.1. Improvement measure

- 1) The proposed study program includes, in semesters 5 and 6, a large number of optional CUs, including some from the recent created Undergraduate Course in Mathematics Applied to Risk Management (MARM), and two mandatory CUs from Scientific Area other than Mathematics. This will contribute to resolve weakness points 1) and 5).
- 2) The proposed study program for the first two years alters the way Mathematical Analysis is lectured. Two new Calculus CUs, Calculus I and Calculus II, are introduced in semesters 1 and 2, respectively, and the more abstract subjects of Mathematical Analysis are addressed deeply in four mandatory CUs that are lectured starting from semester 2. The new arrangement for the Mathematical Analysis' syllabus includes the creation at semester 4 of a new CU, Differential Equations, that gathers the subjects currently addressed in the CUs Mathematical Analysis III and Mathematical Analysis IV, on semesters 3 and 4, respectively. The proposed structure enhances and consistently accommodates the Mathematical Analysis subjects of the first two years, and mitigates weakness points 2) and 3). Those students which are not aligned with weakness 2) (i.e., having scientific maturity and abstraction skills), may select fundamental topics (e.g., set theory, number theory) among the projects offered by the CU Projects in Mathematics, in the semester 1.
- 3) The program proposed for CU Geometry is directed to axiomatic geometries, and Analytic Geometry is incorporated in the Linear Algebra CU's, now called Linear Algebra and Analytic Geometry I and Linear Algebra and Analytic Geometry II. This will settle weakness 4).
- 4) The three profiles proposal (Mathematics; Statistics and Risk Management; and Operations Research) obtained from choosing among a coherent set of optional CUs on the third year i) consistently arranges the way optional CUs are offered, thus mitigating weakness 1); ii) bridges the first cycle to the second cycle, in accordance with point 5) of the SWOT Analysis Opportunities:
- iii) highlights strong scientific and educational areas of the Mathematics Department, giving a positive differentiating element to the course, in accordance with point 3) of the SWOT Analysis Opportunities; iv) does not compromise the basic mathematical training, which is ensured by the CUs of the two first years; and iv) does not inhibit a scientific broad culture, since there is large number of CUs in the third year that do not constraint the profile that the student will choose.

### 8.2.2. Prioridade (alta, média, baixa) e tempo de implementação da medida

Alta; a partir do ano letivo de acreditação do Ciclo de Estudos.

# 8.2.2. Priority (high, medium, low) and implementation time.

High; from school year in which the Study Programme is accredited.

# 8.1.3. Indicadores de implementação

Todos os indicadores comummente utilizados para aferir a qualidade do ciclo de estudos.

### 8.1.3. Implementation indicator(s)

All the indicators commonly considered to measure the quality of the study programme.

# 9. Proposta de reestruturação curricular (facultativo)

### 9.1. Alterações à estrutura curricular

### 9.1. Síntese das alterações pretendidas e respectiva fundamentação

- 1) Alteração do plano curricular;
- 2) Criação de perfis.
- 1) e 2) constituem as ações de melhoria fundamentadas no ponto 8.2.1.

### 9.1. Synthesis of the proposed changes and justification.

- 1) Restructure of the study program;
- 2) Creation of profiles.
- 1) and 2) are the improvement measures justified in 8.2.1.

# 9.2. Nova estrutura curricular pretendida (apenas os percursos em que são propostas alterações)

#### 9.2. Matemática

### 9.2.1. Ramo, opção, perfil, maior/menor ou outra (se aplicável):

Matemática

### 9.2.1. Branch, option, profile, major/minor or other (if applicable).

**Mathematics** 

# 9.2.2. Áreas científicas e créditos necessários à obtenção do grau / Scientific areas and number of credits to award the degree

Área Científica / Scientific Area	Sigla / Acronym	ECTS Obrigatórios / Mandatory ECTS	ECTS Optativos / Optional ECTS*	Observações / Observations
Matemática / Mathematics	M	108	48	
Informática / Informatics	1	6	0	
Ciências Humanas e Sociais / Social Sciences and Humanities		3	0	
Competências Complementares / Transferable Skills	CC	3	0	
Qualquer Área Científica / Any Scientific Area	QAC	0	12	
(5 Items)		120	60	

### 9.2. Estatística e Gestão do Risco

# 9.2.1. Ramo, opção, perfil, maior/menor ou outra (se aplicável):

Estatística e Gestão do Risco

## 9.2.1. Branch, option, profile, major/minor or other (if applicable).

Statistics and Risk Management

# 9.2.2. Áreas científicas e créditos necessários à obtenção do grau / Scientific areas and number of credits to award the degree

Área Científica / Scientific Area	Sigla / Acronym	ECTS Obrigatórios / Mandatory ECTS	ECTS Optativos / Optional ECTS*	Observações / Observations
Matemática / Mathematics	M	108	48	
Informática / Informatics	1	6	0	
Ciências Humanas e Sociais / Social Sciences and Humanities	CHS	3	0	
Competências Complementares / Transferable	CC	3	0	

Skills

Qualquer Área Científica / Any Scientific Area QAC 0 12 120 60 (5 Items)

# 9.2. Investigação Operacional

# 9.2.1. Ramo, opção, perfil, maior/menor ou outra (se aplicável):

Investigação Operacional

### 9.2.1. Branch, option, profile, major/minor or other (if applicable).

**Operations Research** 

### 9.2.2. Áreas científicas e créditos necessários à obtenção do grau / Scientific areas and number of credits to award the degree

Área Científica / Scientific Area	Sigla / Acronym	ECTS Obrigatórios / Mandatory ECTS	ECTS Optativos / Optional ECTS*	Observações / Observations
Matemática / Mathematics	M	108	48	
Informática / Informatics	1	6	0	
Ciências Humanas e Sociais / Social Sciences and Humanities		3	0	
Competências Complementares / Transferable Skills	CC	3	0	
Qualquer Área Científica / Any Scientific Area (5 Items)	QAC	0 <b>120</b>	12 <b>60</b>	

# 9.3. Plano de estudos

### 9.3. Plano de estudos - Matemática - 1.º ano

### 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Matemática

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Mathematics

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

1.º ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

1st year

	Área Científica /	Duração /	Horas Trabalho /			Observações
nidades Curriculares / Curricular Units	Scientific Area (1)	Duration (2)	Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS	Observations (5)
Álgebra Linear e Geometria Analítica I / Linear Algebra and Analytic Geometry I	М	Semestre 1	168	TP: 56; PL:14	6	
Cálculo I / Calculus I	M	Semestre 1	168	TP: 56; PL: 14	6	
Introdução à Lógica e à Matemática Discreta / Introduction to Logic and Discrete Mathematics	M	Semestre 1	168	TP: 56	6	
Projetos em Matemática / Projects in Mathematics	М	Semestre 1	84	TP: 14; OT:14	3	
Introdução à Programação (B) / Introduction to Programming	1	Semestre 1	168	T: 28; PL: 42	6	
Competências Transversais para Ciências e Tecnologia / Soft Skills for Science and Technology	СС	Trimestre 2	84	TP: 10; PL: 50	3	
Análise Real I / Real Analysis I	M	Semestre 2	168	TP: 56	6	
Álgebra Linear e Geometria Analítica II / Linear	М	Semestre 2	168	TP: 56	6	

Algebra and Analytic Geometry II				
Cálculo II / Calculus II	M	Semestre 2 168	TP: 56	6
Geometria / Geometry	M	Semestre 2 168	TP: 56	6
Probabilidades e Estatística I / Probability and Statistics I	М	Semestre 2 168	TP: 56	6
(11 Items)				

### 9.3. Plano de estudos - Matemática - 2.º Ano

9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Matemática

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

**Mathematics** 

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

2.º Ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

2nd Year

### 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	Observações A ECTS Observations (5)
Análise Real II / Real Analysis II	М	Semestre 1	252	TP: 84	9
Análise Numérica / Numerical Analysis	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Álgebra I / Algebra I	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Probabilidades e Estatística II / Probability and Statistics II	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Ciência, Tecnologia e Sociedade / Science, Technology and Society	CHS	Trimestre 2	84	TP: 32; S:8	3
Análise Complexa / Complex Analysis	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Análise e Otimização Numérica / Numerical Analysis and Optimization	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Álgebra II / Algebra II	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Equações Diferenciais / Differential Equations	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
Otimização Linear / Linear Optimization	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
(10 Items)					

### 9.3. Plano de estudos - Matemática - 3.º Ano

9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável):

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

**Mathematics** 

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.° Ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year

Unidades Curriculares /	Área Científica /	Duração /	Horas Trabalho /	Horas Contacto /	ECTS Observações /
Curricular Units	Scientific Area (1)	Duration (2)	Working Hours (3)	Contact Hours (4)	Observations

Opção A1 / Option A1 M Semestre 1 252 depende de UC escolhida / dependent of choice depende de UC escolhida / dependent of choice depende de UC escolhida / dependent of choice Unidade Curricular do Bloco OAC Semestre 1 168 depende de UC escolhida / depende de UC escolhida	9	Optativa / Optional Optativa /
Unidade Curricular de Bloce	6	
Unidade Curricular de Bloce		Optional
Livre 1 / Unrestricted Elective 1 QAC Semestre 1 168 depende de 00 esconidar de la depende de 00 esconidar de 10 esconidar d	6	Optativa / Optional
Opção AB1 / Option AB1 M Semestre 1 252 depende de UC escolhida / dependent of choice	9	Optativa / Optional
Programa de Oportunidades / M Trimestre 2 84 OT: 7 Opportunity Program	3	Optativa / Optional
Opção A3 / Option A3 M Semestre 2 252 depende de UC escolhida / dependent of choice	9	Optativa / Optional
Opção A4 / Option A4 M Semestre 2 168 depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Opção AB2 / Option AB2 M Semestre 2 168 depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Unidade Curricular do Bloco Livre 2 / Unrestricted Elective 2  QAC  Semestre 2 168  depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
(9 Items)		

# 9.3. Plano de estudos - Matemática - 3.º Ano - Grupo de Opções A e B

9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Matemática

### 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable): Mathematics

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano - Grupo de Opções A e B

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year - Option Group A and B

	Área Científica	Duração	Horas Trabalho			Observações
Unidades Curriculares / Curricular Units	/ Scientific Area (1)	Duration (2)	/ Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS	Observations (5)
Álgebra Computacional / Computational Algebra	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Introdução à Teoria dos Grafos / Introduction to Graph Theory	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Medida, Integração e Probabilidades / Measure, Integration and Probability	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Topologia e Introdução à Análise Funcional / Topology and Introduction to Functional Analysis	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	М	Semestre 1	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Estatística Atuarial / Actuarial Statistics	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos Multivariados / Multivariate Models	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Processos Estocásticos e Aplicações / Stochastic	М	Semestre	168	TP:56	6	Optativa /

04/11/21, 17:03	ACEF/1920	/0313787 —	- Guião para a aut	o-avaliação		
Processes and Applications		1				Optional - Opção B / Option B
Investigação Operacional / Operations Research	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
História da Matemática / History of Mathematics	M	Semestre 1	84	TP:28	3	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies / Differential Geometry of Curves and Surfaces	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Mecânica Analítica / Analytical Mechanics	M	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Teoria dos Números e Aritmética Transfinita / Number Theory and Ordinal Arithmetic	M	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	М	Semestre 2	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Cálculo Financeiro / Financial Calculus	M	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Matemática Financeira / Financial Mathematics	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos de Apoio à Decisão / Decision Support Models	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos Lineares em Estatística / Linear Models in Statistics	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Sistemas de Informação e Estatística / Statistics and Information Systems	М	Semestre 2	84	TP:42	3	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelação de Sistemas / Systems Modelling	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos de Apoio à Decisão / Decision Support Models	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos Lineares em Estatística / Linear Models in Statistics	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Otimização Não Linear / Non Linear Optimization	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Sistemas de Informação e Estatística / Statistics and Information Systems	М	Semestre 2	84	TP:42	3	Optativa / Optional - Opção B / Option B
(24 Home)						

# 9.3. Plano de estudos - Matemática - 3.º Ano - Grupo Programa de Oportunidades

# 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Matemática

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Mathematics

(24 Items)

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano - Grupo Programa de Oportunidades

### 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3 rd Year - Opportunity Program Group

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

	Área Científica /	Duração /	Horas Trabalho /	Horas Contacto /	ECTS	Observações	
	Scientific Area (1)	Duration (2)	Working Hours (3)	Contact Hours (4)		Observations (5)	
Programa de Introdução à Prática Profissional / Undergraduate Practice Opportunities Program	М	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional	
Programa de Introdução à Investigação Científica / Undergraduate Research Opportunity Program	M	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional	
(2 Items)							

### 9.3. Plano de estudos - Estatística e Gestão do Risco - 1.º Ano

# 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável):

Estatística e Gestão do Risco

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Statistics and Risk Management

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

1.º Ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

1st Year

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

, ·						
	Área Científica /	Duração /	Horas Trabalho /	Horas Contacto /		Observações
Unidades Curriculares / Curricular Units	Scientific Area (1)	Duration (2)	Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)		Observations (5)
Álgebra Linear e Geometria Analítica I / Linear Algebra and Analytic Geometry I	М	Semestre 1	168	TP: 56; PL:14	6	
Cálculo I / Calculus I	M	Semestre 1	168	TP: 56; PL: 14	6	
Introdução à Lógica e à Matemática Discreta / Introduction to Logic and Discrete Mathematics	M	Semestre 1	168	TP: 56	6	
Projetos em Matemática / Projects in Mathematics	M	Semestre 1	84	TP: 14; OT:14	3	
Introdução à Programação (B) / Introduction to Programming	I	Semestre 1	168	T: 28; PL: 42	6	
Competências Transversais para Ciências e Tecnologia / Soft Skills for Science and Technology	СС	Trimestre 2	2 84	TP: 10; PL: 50	3	
Análise Real I / Real Analysis I	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Álgebra Linear e Geometria Analítica II / Linear Algebra and Analytic Geometry II	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Cálculo II / Calculus II	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Geometria / Geometry	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Probabilidades e Estatística I / Probability and Statistics I	М	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
(11 Items)						

# 9.3. Plano de estudos - Estatística e Gestão do Risco - 2.º Ano

### 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Estatística e Gestão do Risco

### 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Statistics and Risk Management

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

2.º Ano

### 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

2nd Year

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	Observações / ECTS Observations (5)
Análise Real II / Real Analysis II	M	Semestre 1	252	TP: 84	9
Análise Numérica / Numerical Analysis	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Álgebra I / Algebra I	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Probabilidades e Estatística II / Probability and Statistics II	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Ciência, Tecnologia e Sociedade / Science, Technology and Society	CHS	Trimestre 2	84	TP: 32; S:8	3
Análise Complexa / Complex Analysis	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Análise e Otimização Numérica / Numerical Analysis and Optimization	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Álgebra II / Algebra II	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Equações Diferenciais / Differential Equations	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Otimização Linear / Linear Optimization	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
(10 Items)					

# 9.3. Plano de estudos - Estatística e Gestão do Risco - 3.º Ano

### 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Estatística e Gestão do Risco

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Statistics and Risk Management

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS	Observações / Observations (5)
Opção A1 / Option A1	М	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	U	Optativa / Optional
Opção A2 / Option A2	М	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice		Optativa / Optional
Unidade Curricular do Bloco Livre 1 / Unrestricted Elective 1	QAC	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice		Optativa / Optional
Opção AB1 / Option AB1	М	Semestre 1	252	depende de UC escolhida / dependent of choice	9	Optativa / Optional
Programa de Oportunidades / Opportunity Program	M	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional
Opção A3 / Option A3	M	Semestre 2	252	depende de UC escolhida	9	Optativa /

				/ dependent of choice		Optional
Opção A4 / Option A4	М	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Opção A5 / Option A5	М	Semestre 2	84	depende de UC escolhida / dependent of choice	3	Optativa / Optional
Opção AB2 / Option AB2	М	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Unidade Curricular do Bloco Livre 2 / Unrestricted Elective 2	QAC	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
(10 Items)						

# 9.3. Plano de estudos - Estatística e Gestão do Risco - 3.º Ano - Grupo de Opções A e B

### 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Estatística e Gestão do Risco

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

Statistics and Risk Management

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano - Grupo de Opções A e B

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year - Option Group A and B

	Área Científica	Duração	Horas Trabalho	Horas Contacto /		Observações
Unidades Curriculares / Curricular Units	/ Scientific Area (1)	Duration (2)	/ Working Hours (3)	Contact Hours (4)	ECTS	Observations (5)
Estatística Atuarial / Actuarial Statistics	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Medida, Integração e Probabilidades / Measure, Integration and Probability	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Modelos Multivariados / Multivariate Models	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Processos Estocásticos e Aplicações / Stochastic Processes and Applications	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	М	Semestre 1	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Álgebra Computacional / Computational Algebra	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Introdução à Teoria dos Grafos / Introduction to Graph Theory	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Topologia e Introdução à Análise Funcional / Topology and Introduction to Functional Analysis	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Investigação Operacional / Operations Research	М	Semestre 1	252	TP: 56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
História da Matemática / History of Mathematics	М	Semestre 1	84	TP: 28	3	Optativa / Optional - Opção B / Option B

04/11/21, 17:03	ACEF/1920	/0313787 –	– Guião para a au	to-avaliação		
Cálculo Financeiro / Financial Calculus	M	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Matemática Financeira / Financial Mathematics	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Modelos de Apoio à Decisão / Decision Support Models	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Modelos Lineares em Estatística / Linear Models in Statistics	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Sistemas de Informação e Estatística / Statistics and Information Systems	M	Semestre 2	84	TP:42	3	Optativa / Optional - Opção A / Option A
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	М	Semestre 2	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Mecânica AnalíticaMecânica Analítica / Analytical Mechanics	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Teoria dos Números e Aritmética Transfinita / Number Theory and Ordinal Arithmetic	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies / Differential Geometry of Curves and Surfaces	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelação de Sistemas / Systems Modelling	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Otimização Não Linear / Non Linear Optimization	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B

(22 Items)

and Information Systems

# 9.3. Plano de estudos - Estatística e Gestão do Risco - 3.º Ano - Grupo Programa de Oportunidades

### 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Estatística e Gestão do Risco

Semestre 84

TP:42

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable): Statistics and Risk Management

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

Sistemas de Informação e Estatística / Statistics

3.º Ano - Grupo Programa de Oportunidades

### 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year - Opportunity Program Group

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

	Área Científica /		Horas Trabalho / Working Hours (3)			Observações
Inidades Curriculares / Curricular Units	Scientific Area (1)				ECTS	Observations (5)
Programa de Introdução à Prática Profissional / Undergraduate Practice Opportunities Program	М	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional

Optativa /

Optional -

Opção B / Option B

(2 Items)

Programa de Introdução à Investigação Científica / Undergraduate Research Opportunity Program

Trimestre 2 84

OT: 7

Optativa / **Optional** 

# 9.3. Plano de estudos - Investigação Operacional - 1.º ano

9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Investigação Operacional

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

**Operations Research** 

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

1.º ano

### 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

1st year

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS	Observações / Observations (5)
Álgebra Linear e Geometria Analítica I / Linear Algebra and Analytic Geometry I	М	Semestre 1	168	TP: 56; PL:14	6	
Cálculo I / Calculus I	M	Semestre 1	168	TP: 56; PL: 14	6	
Introdução à Lógica e à Matemática Discreta / Introduction to Logic and Discrete Mathematics	М	Semestre 1	168	TP: 56	6	
Projetos em Matemática / Projects in Mathematics	М	Semestre 1	84	TP: 14; OT:14	3	
Introdução à Programação (B) / Introduction to Programming	1	Semestre 1	168	T: 28; PL: 42	6	
Competências Transversais para Ciências e Tecnologia / Soft Skills for Science and Technology	CC	Trimestre 2	84	TP: 10; PL: 50	3	
Análise Real I / Real Analysis I	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Álgebra Linear e Geometria Analítica II / Linear Algebra and Analytic Geometry II	М	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Cálculo II / Calculus II	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Geometria / Geometry	M	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
Probabilidades e Estatística I / Probability and Statistics I	М	Semestre 2	2 168	TP: 56	6	
(11 Items)						

# 9.3. Plano de estudos - Investigação Operacional - 2.º Ano

9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Investigação Operacional

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable):

**Operations Research** 

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

2.º Ano

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

2nd Year

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS Observações / Observations (5)
Análise Real II / Real Analysis II	M	Semestre 1	252	TP: 84	9
Análise Numérica / Numerical Analysis	: М	Semestre 1	168	TP: 56	6
Álgebra I / Algebra I	M	Semestre 1	168	TP: 56	6
Probabilidades e Estatística II / Probability and Statistics II	М	Semestre 1	168	TP: 56	6
Ciência, Tecnologia e Sociedade / Science, Technology and Society	CHS	Trimestre 2	84	TP: 32; S:8	3
Análise Complexa / Complex Analysis	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Análise e Otimização Numérica / Numerical Analysis and Optimization	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
Álgebra II / Algebra II	M	Semestre 2	168	TP: 56	6
Equações Diferenciais / Differential Equations	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
Otimização Linear / Linear Optimization	М	Semestre 2	168	TP: 56	6
(10 Items)					

- 9.3. Plano de estudos Investigação Operacional 3.º Ano
- 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Investigação Operacional
- 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable): **Operations Research**
- 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano

### 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)		Observações / Observations (5)
Opção A1 / Option A1	М	Semestre 1	252	depende de UC escolhida / dependent of choice	9	Optativa / Optional
Opção A2 / Option A2	М	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Unidade Curricular do Bloco Livre 1 / Unrestricted Elective 1	QAC	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Opção AB1 / Option AB1	М	Semestre 1	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Programa de Oportunidades / Opportunity Program	М	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional
Opção A3 / Option A3	М	Semestre 2	252	depende de UC escolhida / dependent of choice	9	Optativa / Optional
Opção A4 / Option A4	М	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Opção AB2 / Option AB2	М	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional
Unidade Curricular do Bloco Livre 2 / Unrestricted Elective 2 (9 Items)	QAC	Semestre 2	168	depende de UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional

- 9.3. Plano de estudos Investigação Operacional 3.º Ano Grupo de Opções A e B
- 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Investigação Operacional

# 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable): **Operations Research**

# 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano - Grupo de Opções A e B

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year - Option Group A and B

Haidadaa Curriaularea / Curriaular Haifa	Área Científica	Duração /	Horas Trabalho	Horas Contacto /	ECTS	Observações /
Unidades Curriculares / Curricular Units	/ Scientific Area (1)	Duration (2)	/ Working Hours (3)	Contact Hours (4)	ECIS	Observations (5)
Investigação Operacional / Operations Research	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Introdução à Teoria dos Grafos / Introduction to Graph Theory	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Processos Estocásticos e Aplicações / Stochastic Processes and Applications	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	M	Semestre 1	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Álgebra Computacional / Computational Algebra	M	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Medida, Integração e Probabilidades / Measure, Integration and Probability	М	Semestre 1	268	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Topologia e Introdução à Análise Funcional / Topology and Introduction to Functional Analysis	М	Semestre 1	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Estatística Atuarial / Actuarial Statistics	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelos Multivariados / Multivariate Models	М	Semestre 1	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
História da Matemática / History of Mathematics	М	Semestre 1	84	TP: 28	3	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Modelação de Sistemas / Systems Modelling	М	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Modelos de Apoio à Decisão / Decision Support Models	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Modelos Lineares em Estatística / Linear Models in Statistics	M	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Otimização Não Linear / Non Linear Optimization	M	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Sistemas de Informação e Estatística / Statistics and Information Systems	M	Semestre 2	84	TP: 42	3	Optativa / Optional - Opção A / Option A

,		7.02.7.020700.0.0.	ound para a date	a rana ya c		
UC optativa do Mestrado em Matemática e Aplicações / Optional UC of the Master in Mathematics and Applications	M	Semestre 2	168	depende da UC escolhida / dependent of choice	6	Optativa / Optional - Opção A / Option A
Mecânica Analítica / Analytical Mechanics	M	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies / Differential Geometry of Curves and Surfaces	М	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Teoria dos Números e Aritmética Transfinita / Number Theory and Ordinal Arithmetic	M	Semestre 2	252	TP:56	9	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Cálculo Financeiro / Financial Calculus	M	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
Matemática Financeira / Financial Mathematics	M	Semestre 2	168	TP:56	6	Optativa / Optional - Opção B / Option B
(21 Items)						

- 9.3. Plano de estudos Investigação Operacional 3.º Ano Grupo Programa de Oportunidades
- 9.3.1. Ramo, variante, área de especialização do mestrado ou especialidade do doutoramento (se aplicável): Investigação Operacional
- 9.3.1. Branch, option, specialization area of the master or speciality of the PhD (if applicable): **Operations Research**

### 9.3.2. Ano/semestre/trimestre curricular:

3.º Ano - Grupo Programa de Oportunidades

# 9.3.2. Curricular year/semester/trimester:

3rd Year - Opportunity Program Group

# 9.3.3 Plano de estudos / Study plan

Unidades Curriculares / Curricular Units	Área Científica / Scientific Area (1)	Duração / Duration (2)	Horas Trabalho / Working Hours (3)	Horas Contacto / Contact Hours (4)	ECTS	Observações
						Observations (5)
Programa de Introdução à Prática Profissional / Undergraduate Practice Opportunities Program	М	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional
Programa de Introdução à Investigação Científica / Undergraduate Research Opportunity Program	М	Trimestre 2	84	OT: 7	3	Optativa / Optional
(2 Items)						

# 9.4. Fichas de Unidade Curricular

## Anexo II - Álgebra Linear e Geometria Analítica I

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Linear Algebra and Analytic Geometry I

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP: 56; PL:14

#### 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

António José Mesquita da Cunha Machado Malheiro - TP: 56; PL:14

### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Resolver problemas de Álgebra Linear, mediante habilidades de cálculo básico e outras técnicas.
- Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conhecimentos, procedimentos, resultados e ideias matemáticas.
- Desenvolver a capacidade de identificar e descrever matematicamente um problema, estruturar a informação disponível e selecionar um modelo adequado.
- Aprender a falar, demonstrar e resolver em Matemática. Distinguir o que são as coisas de como se calculam.
- Alcançar o juízo crítico necessário para saber se uma demonstração está correta.
- Começar a enfrentar problemas que não são exercícios.

### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him:

- To solve Linear Algebra problems using basic calculus skills and other techniques.
- To communicate, orally or by writing, knowledges, procedures, results and mathematic ideas.
- To develop the skill of identify and mathematically describe a problem, to organize the disponible information and to select an acquire model.
- To learn how to speak, prove and solve in Mathematics. To distinguish what are the things from how they are
- To reach a needed critical judgement to know if a proof is correct.
- To start facing problems that are not exercises.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Sistemas de equações lineares e matrizes: definições; operações, transformações elementares; característica; método de Gauss e de Gauss-Jordan; inversão de matrizes.
- 2. Determinantes: definição; Teorema de Laplace; aplicação à inversão de matrizes; regra de Cramer.
- 3. Espaços vetoriais: definição, subespaços vetoriais; bases e dimensão; soma e soma direta de subespaços vetoriais; mudança de base.
- 4. Transformações lineares: definição; representação matricial; núcleo e imagem; isomorfismos; composição e invertibilidade; mudança de base.
- 5. Espaços euclidianos: produto interno; norma, Desigualdade de Cauchy-Schwarz, ângulo, projeções ortogonais; bases ortogonais; ortogonalização de Gram-Schmidt; complementos ortogonais; produto externo e misto de vetores
- 6. Valores e vetores próprios: definições; subespaços próprios; polinómio característico; multiplicidades algébrica e qeométrica; condições de diagonalização de matrizes; diagonalização de matrizes simétricas.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Systems of linear equations and matrices: basic definitions; algebraic, elementary; matrix rank; Gauss and Gauss-Jordan elimination method; matrix inversion.
- 2. Determinants: definition; Laplace theorem; application to matrix inversion; Cramer's rule.
- 3. Vector spaces: definition; vector subspaces; basis and dimension; sum and direct sum of vector spaces; change of

basis.

- 4. Linear transformations: definition; matrix representation; kernel and image; isomorphisms; composition and invertibility; change of basis.
- 5. Euclidean spaces: inner products; norm, Cauchy-Schwarz inequality, angle; orthogonal projections; orthogonal basis; Gram-Schmidt orthogonalization; orthogonal complement; cross and mixed products of vectors in R3.
- 6. Eigenvalues and eigenvectors: definitions; proper subspaces; characteristic polynomial; algebraic and geometric multiplicity; matrix diagonalization; symmetric matrix diagonalization.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os tópicos do conteúdo programático têm como objetivo que o aluno saiba resolver sistemas de equações lineares matricialmente, calcular determinantes, calcular sistemas geradores e bases de subespaços vetoriais, expressar uma transformação linear em termos matriciais, saber se uma matriz ou um endomorfismo são diagonalizáveis ou não, conhecer o teorema espetral para matrizes simétricas e calcular diversas noções de natureza métrica.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics of the syllabus aim to provide that the student know how to solve systems of linear equations with matrices, to compute determinants, to compute systems of generators and basis of vector subspaces, to express a linear transformation in terms of a matrix, to know if a matrix or a endomorphism are or nor diagonalizable, to know the spectral theorem for symmetric matrices and to compute several metric notions.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas, nas sessões semanais destinadas ao atendimento dos estudantes ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor.

O estudante pode realizar a disciplina por avaliação contínua que consiste na realização de dois testes. Em caso de insucesso, o estudante pode ainda apresentar-se a exame.

Os alunos para serem avaliados têm de assistir a, pelo menos, 2/3 das aulas teóricas lecionadas e 2/3 das aulas práticas lecionadas.

### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process.

Students can ask questions during the classes, in weekly scheduled sessions or in special sessions accorded directly with the professor.

There are two mid-term tests that can substitute the final exam in case of approval. Otherwise the student must pass the final exam

In order to be evaluated, students must attend, at least, 2/3 of the lectures and 2/3 of the problem-solving classes.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

A quase totalidade dos resultados é apresentada com a respetiva demonstração.

Antes de se expor a teoria de cada capítulo, o aluno tem à sua disposição textos de apoio e as respetivas folhas de exercícios. Alguns destes exercícios serão resolvidos em aula. A resolução dos restantes faz parte do trabalho pessoal do aluno.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process. Most results are proven. Students have access to copies of the theory and proposed exercises. Some of the exercises are solved in class, the remaining are left to the students as part of their learning process.

### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

David Lay, "Linear algebra and its applications", 5th edition

P. Santana, J. F. Queiró, "Introdução à Álgebra Linear", 2010

H. Anton e C. Rorres, "Elementary linear algebra: applications version", várias edições John Wiley & Sons, Inc Isabel Cabral, Cecília Perdigão, Carlos Saiago, "Álgebra Linear", Escolar Editora, 2018 (5ª Edição).

J. V. Carvalho, Álgebra Linear e Geometria Analítica, texto de curso ministrado na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Departamento de Matemática da FCT/UNL, 2000. http://ferrari.dmat.fct.unl.pt/personal/jvc/alga2000.html

# Anexo II - Cálculo I

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Cálculo I

### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Calculus I

### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56: PL:14

# 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Fabio Augusto da Costa Carvalho Chalub - TP:56; PL:14

### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular, o estudante terá adquirido conhecimentos e competências que lhe permitam (i) conhecer e aplicar os conceitos de majorante, minorante, supremo e ínfimo de um conjunto, (ii) manipular a função módulo e usar a desigualdade triangular para estimar erros, (iii) conhecer e manipular as funções trigonométricas inversas, em particular, identificando domínios e resolvendo equações e inequações envolvendo estas funções, (iv) calcular limites e levantar indeterminações envolvendo funções elementares, (v) conhecer a fórmula de Taylor e usá-la para obter aproximações polinomiais estimando os erros cometidos, (vi) calcular primitivas e integrais, (vii) conhecer o conceito de integral impróprio e saber analisar a sua convergência, (viii) resolver algumas equações diferenciais de primeira ordem; (ix) conceber e interpretar algoritmos para vários dos tópicos tratados. O estudante estará apto para um estudo mais aprofundado de análise infinitesimal.

### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to know and to use the concepts of majorant, minorant, supremum and infimum of a set, (ii) to deal with the absolute value function and to use triangular inequality to estimate errors, (iii) to know and to work with inverse trigonometric functions, in particular, identifying domains and solving equations and inequations involving these functions, (iv) to compute limits and to solve indeterminate forms, (v) to know Taylor's formula and to use it to obtain polynomial approximations estimating the errors, (vi) to compute antiderivatives and integrals, (vii) to know the concept of improper integral and to know methods to study convergence, (viii) to solve some first order differential equations, (ix) to conceive and to interpret algorithms to several of the topics considered.

The student will be able to a deeper study of infinitesimal analysis.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Valor absoluto; erros; majorante, minorante, supremo e ínfimo.
- 2. Funções trigonométricas inversas; regra de Cauchy; fórmula de Taylor.
- 3. Primitivação.
- 4. Integração (integral definido, indefinido e impróprio).
- 5. Equações diferenciais (equações lineares de 1ª ordem; equações de variáveis separadas; mudanças de variável).

### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Absolute value; errors; majorant, minorant, supremum and infimum.
- 2. Inverse trigonometric functions; Cauchy's rule; Taylor's formula.

- 3. Antiderivatives.
- 4. Integration (definite and indefinite integral, improper integral).
- 5. Differential equations (first order linear equations; equations with separable variables; change of variables).

### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os conteúdos programáticos enumerados permitem alcançar os objetivos descritos nos items (i)-(viii) quando lecionadas numa perspetiva de cálculo. Diversos tópicos do programa permitem cumprir o objetivo descrito por (ix). A título de exemplo, o conceito de integral e a sua ligação ao cálculo de áreas é adequado à introdução de algoritmos que permitam obter valores aproximados de um integral. Finalmente, a compreensão prática de conceitos como majorante e supremo, o cálculo de limites e o contacto com algumas demonstrações simples (ou simplificadas) nesta unidade curricular permitem a transição do estudante para a subtileza do estudo em análise infinitesimal.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The syllabus covers the learning objectives described on items (i)-(viii) when taught in a calculus perspective. Several topics in the syllabus allow to accomplish the learning objective described in (ix). As an example, consider the concept of integral and its relationship with the calculus of areas, this is an appropriate topic to stimulate the conception of algorithms producing approximate values to an integral. Finally, a practical understanding of concepts as majorant and supremum, the calculus of limits and the contact with some simple (or simplified) proofs in this curricular unit prepare the student to address the subtlety of infinitesimal analysis.

### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas com exposição oral dos conceitos e resultados que são acompanhados, sempre que possível, das respetivas demonstrações e devidamente complementados com exemplos e aplicações. É sugerida uma lista de exercícios e problemas para serem resolvidos autonomamente. O estudante será incentivado a utilizar/conceber programas computacionais a acompanhar os tópicos a tratar. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores. Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes e possivelmente em trabalhos para casa. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts and results together with their proofs, whenever possible, and complemented with examples and applications. A list of exercises and problems is provided to the students to be solved independently. The student is encouraged to use and conceive computational programs related to the topics under study. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests and possibly homework. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição dos conteúdos programáticos acompanhada de exemplos ilustrativos permite ao estudante praticar em autonomia os conteúdos expostos, sendo sugerida uma lista de exercícios e problemas cumprindo os objetivos de cálculo e desenvolvimento de raciocínio da unidade curricular. O domínio de cálculo em conjunto com a exposição a demonstrações de alguns resultados estudados e a introdução de novos conceitos permite a transição do estudante para a análise infinitesimal.

### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The exposition of the syllabus, illustrated with examples, prepares the student to practice independently the subjects studied. A list of exercises and problems covering the calculus learning outcomes and reasoning development is provided. Mastering the calculus together with the exposition to some proofs of the studied results, as well as the knowledge of new concepts, prepares the student to infinitesimal analysis.

### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- H. Anton, I. Bivens & S. Davis, Calculus, 8th edition, John Wiley & Sons, 2005.
- G. Simmons, Calculus with Analytic Geometry, 2nd edition, McGraw Hill, 1996.
- M. Spivak, Calculus, 3rd edition, Publish or Perish Inc., 2006.
- G. Strang, Calculus I, OpenStax, 2018.

### Anexo II - Introdução à Lógica e à Matemática Discreta

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Introdução à Lógica e à Matemática Discreta

### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Introduction to Logic and Discrete Mathematics

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

#### 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Vítor Hugo Bento Dias Fernandes (apenas Responsável não tem horas de contacto)

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Manuel Messias Rocha de Jesus - TP:44h Reinhard Kahle - TP:12h

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido técnicas de manipulação de estruturas discretas e conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitem: trabalhar com noções elementares de lógica proposicional e quantificadores; elaborar algumas estratégias para demonstrações matemáticas; utilizar a teoria de conjuntos num estilo informal, mas suficientemente rigoroso; desenvolver técnicas de contagem; conhecer as propriedades principais dos inteiros e aplicar algumas dessas técnicas no estudo de grafos.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired approaches to address discrete structures and knowledge and skills that will enable him to: work with elementary notions of propositional and quantifier logic; develop some strategies for mathematical proofs; use set theory in an informal but sufficiently rigorous style; develop counting techniques; know the main properties of integers and apply some of these techniques in the study of graphs.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Lógica proposicional e quantificadores.
- 2. Estratégias de demonstração.
- 3. Operações, relações e funções.
- 4. Equipotência de conjuntos e cardinais.
- 5. Contagens.
- 6. Inteiros, divisores e primos.
- 7. Grafos.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Propositional Logic and quantifiers.
- 2. Proof strategies.
- 3. Operations, relations and functions.
- 4. Equipotent sets and cardinals.
- 5. Counting.
- 6. Integers, divisors and primes.
- 7. Graphs.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático da UC é estruturado de forma a que, por um lado, os tópicos apresentados sejam devidamente encadeados e, por outro lado, que permitam atingir os objetivos da UC.

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The programmatic content of the lecture course is structured in such a way that, on the one hand, the topics presented are properly linked and, on the other hand, that they can achieve the objectives of the lecture course.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teórico-práticas, alternando sessões teóricas e sessões práticas da forma mais adequada para alcançar os objetivos propostos. Nas sessões teóricas são introduzidos os conteúdos da UC, ilustrados com exemplos de aplicação. Nas sessões práticas os alunos serão chamados a resolver exercícios e a elaborar demonstrações de alguns dos resultados apresentados. Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas ou nas sessões destinadas a atendimento de alunos ou ainda em sessões extra combinadas diretamente entre aluno e professor. Os alunos têm de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical-practical, alternating theoretical sessions and practical sessions in the most appropriate way to achieve the proposed objectives. In theoretical sessions the contents of the course are exposed and illustrated with examples. In practical sessions students will be asked to solve problems and elaborate demonstrations of some of the results presented. Any questions/doubts are clarified during classes or tutorial sessions or even in extra sessions combined directly between student and teacher. Students must to attend a minimum of two thirds of the classes. Continuous evaluation is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Os conteúdos teóricos necessários para atingir os objetivos de aprendizagem são introduzidos em sessões teóricas, com o apoio adicional dos horários de atendimento. A aquisição destes conhecimentos é avaliada nas provas escritas. As componentes práticas necessárias para atingir os objetivos de aprendizagem são desenvolvidas em todas as formas de horas de contacto: nas sessões teóricas através da exposição e discussão dos conceitos fundamentais da UC e nas sessões práticas, com o apoio adicional dos horários de atendimento, através da resolução de problemas com o apoio do docente.

#### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The theoretical components necessary to achieve the learning objectives are taught in lecture sessions, with additional support of tutorial sessions. The acquisition of knowledge is assessed with written evaluations. The practical components necessary to achieve the learning objectives are developed in all forms of contact hours: the theoretical sessions through exposure and and discussion of the fundamental concepts of the discipline and the practical sessions, with additional support of tutorial sessions, through problem solving with the help of the teacher.

## 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- A. Eccles, P. J.; An Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press, 1997.
- B. Vellement, D. J.; How To Prove It, A Structured Approach, Cambridge University Press, 1994.
- L. Lovász, J. Pelikán, K. Vestergombi, Discrete Mathematics: Elementary and Beyond, Springer, 2003.
- P. R. Halmos. Naive Set Theory. Springer, 1998.
- Y. Moschovakis. Notes on Set Theory. 2nd ed., Springer, 2006.

# Anexo II - Projetos em Matemática

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Projetos em Matemática

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Projects in Mathematics

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

# 9.4.1.4. Horas de trabalho:

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:14; OT:14

#### 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira - TP:14; OT:14

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Cláudio António Rainha Aires Fernandes - TP:14; OT:14

Manuel Almeida Silva - TP:14; OT:14

Manuel Messias Rocha de Jesus - TP:14; OT:14

Nelson Fernando Chibeles Pereira Martins - TP:14; OT:14

Paula Cristiana Costa Garcia da Silva Patrício - TP:14

Paulo José Fernandes Louro Ribeiro Doutor - TP:14

Rui Alberto Pimenta Rodrigues - TP:14; OT:14

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá

- i) adquirido conhecimentos na área de desenvolvimento do projeto que lhe permitem explorar, aplicar e fundamentar metodologias específicas de abordagem dos problemas da área da Matemática subjacente;
- ii) desenvolvido capacidades para investigar (procurar metodologias adequadas) de forma autónoma;
- iii) reforçado a capacidade de trabalho em equipa;
- iv) aperfeiçoado a aptidão de escrita de relatórios de carácter científico;
- v) aperfeiçoado a aptidão de exposição oral de assuntos de natureza científica.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will must have:

- (i) acquired knowledge in the project area that allows him to explore, apply and substantiate specific methodologies to analyse the underlying mathematical problems;
- ii) developed skills to investigate (look for appropriate methodologies) autonomously;
- iii) strengthened the ability in teamwork;
- iv) improved writing skills of scientific reports;
- v) improved their oral presentation skills on scientific subjects.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

Como exemplo, apresentam-se os projetos A e B.

Projeto A. Identificação de áreas prioritárias para a conservação, na área de Modelos Matemáticos em Biologia:

- 1. Problema básico: seleção de conjuntos mínimos de áreas com representação de todas as espécies áreas-Problema da cobertura mínima de um conjunto (set covering). Modelação de problemas com variáveis 0/1 e com variáveis boleanas.
- 2. Incorporar conexidade na identificação de áreas prioritárias para a conservação-Problema da cobertura conexa (minimum connected cover). Grafos e conexidade.
- 3. Desenho de corredores ecológicos Problema de Steiner em grafos.

Projeto B: Matemática para Criptografia, na área de Matemática Discreta.

- 1. Principais sistemas criptográficos. Análise de frequência e criptoanálise. Máquina Enigma. Teoria de matrizes e aritmética modular para criptografia. Método de Hill/variantes.
- 2. Problema da distribuição de chaves. Métodos assimétricos e de chave pública.
- 3. Implementação de algoritmos criptográficos.

# 9.4.5. Syllabus:

As an example, we present projects A and B.

Project A. Identification of priority areas for conservation, in the area of Mathematical Models in Biology:

- 1. Basic problem: selection of the minimum area sets with representation of all species areas The minimum set covering problem. Modeling problems with 0/1 variables and boolean variables.
- 2. Incorporate connectivity in identifying priority conservation areas The minimum connected cover problem. Graphs
- 3. Planning and design ecological corridors The Steiner problem in graphs.

Project B: Mathematics for Cryptography, in the area of Discrete Mathematics.

- 1. Main cryptographic systems. Frequency analysis and cryptanalysis. Enigma machine. Matrix theory and modular arithmetic for cryptography. Hill method / variants.
- 2. Key distribution problem. Asymmetric and public key methods.
- 3. Implementation of cryptographic algorithms.

## 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Cada objetivo corresponde a uma etapa (milestone) do projeto. Ilustra-se a "Demonstração da coerência" com o Projeto A.

O estudante é conduzido à dedução do sistema de desigualdades lineares em variáveis 0/1 e do conjunto de clausulas que modelam o problema 1, concretizando a 1a etapa do projeto.

A incorporação de requisitos de conexidade dirige o estudante aos grafos, em particular à noção de conexidade que será utilizada de diferentes formas. Este estudo completa a etapa 2 do projeto.

O traçado de corredores ecológicos a ligar diferentes habitats proporciona a descoberta do problema de Steiner em grafos e de algumas variantes deste problema. A adequação desses problemas às questões ecológicas enunciadas constituí a etapa 3 do projeto.

No final o estudante descobriu, de forma dirigida, ferramentas matemáticas de áreas distintas (otimização combinatória, lógica e grafos) aplicadas à conservação biodiversidade.

A UC permite efetivar de forma natural um sistema de tutoria.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Each objective corresponds to a milestone of the project. We will explain the "Demonstration of the syllabus coherence" with Project A:

The student is led to deduce the system of linear inequalities in variables 0/1 and the set of clauses that model problem 1, completing the project first stage.

Incorporate the connectivity requirements leads the student to the graph theory, specially the notion of connectivity that will be used by different ways. This study completes step 2 of the project.

Planning and design the ecological corridors linking the different habitats provides the discovery of the Steiner problem in graphs and some their variants. The connection of these problems to the ecological listed issues constituted the stage 3 of the project.

In the end the student discovered, in a leaded way, mathematical tools from different areas (combinatorial optimization, logic and graphs) applied to biodiversity conservation.

The UC allows us to implement, naturally, a tutorial system.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Na primeira aula cada docente (tutor) apresenta um projeto a desenvolver numa área (e.g., Teoria dos Números, Investigação Operacional, Modelos Matemáticos em Biologia, Teoria dos Conjuntos). São constituídos grupos de (~ 5) estudantes para cada projeto. Para cada grupo estabelece-se o conjunto de etapas ("milestones") e sua calendarização, que culmina com a redação de um relatório e uma apresentação oral. A avaliação incide (80%) sobre estes dois elementos (relatório 50%, apresentação 30%) e, com menor peso (20%) sobre as apresentações (orais e/ou escritas) nas outras fases de desenvolvimento do projeto. Ao longo do trimestre o tutor orienta os alunos afetos em aulas Teórico-Práticas onde aprecia o estado de desenvolvimento do projeto e faz convergir o resultado das suas pesquisas autónomas com o foco nas etapas do projeto. Cada tutor disporá de um horário de atendimento semanal dos estudantes afetos, efetivando um verdadeiro sistema tutorial aos estudantes do 1º ano da Licenciatura.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

In the first class each teacher (tutor) presents one project to be developed in an area (e.g., Number Theory, Operational Research, Mathematical Models in Biology, Set Theory). Groups of (~ 5) students are formed for each project. For each group is established the set of milestones and their schedule, which culminates with the writing of a report and an oral presentation. The evaluation focuses (80%) on these two elements (report 50%, presentation 30%) and, with less weight (20%) on the presentations (oral and / or written) in the other phases of project development. Throughout the quarter the tutor quides the oriented students in theoretical-practical classes where he appreciates the state of development of the project and the convergence of the result of his autonomous research with the focus on the project stages. Each tutor will have a weekly schedule for the oriented students, making a real tutorial system for students of the degrees first year.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

As aulas teórico-práticas têm início com apresentações dos estudantes das metodologias que recolheram como resultado das suas pesquisas orientadas para responder à etapa corrente do projeto. O docente modera a discussão sobre a pertinência das propostas e orienta os trabalhos de forma a garantir desenvolvimentos que conduzam à realização da etapa corrente. No final estabelece orientações sobre o trabalho a realizar autonomamente pelos estudantes a discutir na aula seguinte.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The theoretical-practical classes begin with the student's presentations of the methodologies they have collected as a result of their research, oriented to respond to the current stage of the project. The teacher moderates the discussion about the relevance of the proposals and guides the work in order to ensure developments that lead to the conclusion of the current stage. At the end it establishes guidelines on the work to be done autonomously by the students to discuss in the next class.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Bibliography depends on the specific project. Examples of references for projects on Set Theory, Number Theory, and Cryptography are:

1. J. P. Eccles. An Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press, 1997.

- 2. H. B. Enderton. Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.
- 3. A. J. Franco de Oliveira. Teoria de Conjuntos. Livraria Escolar Editora, 1982.
- 4. P. R. Halmos. Naive Set Theory. Springer, 1998.
- 5. T. Jech. Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer, 2002.
- 6. Y. Moschovakis. Notes on Set Theory. 2nd ed., Springer, 2006.
- 7. J. P. Oliveira Santos. Introdução à Teoria dos Números. Instituto de Matemática Pura e Aplicada 1998.
- 8. D. R. Stinson; Cryptography: Theory and Practice. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- 9. D. J. Vellement. How to Prove It, A Structured Approach, Cambridge University Press, 1994.

## Anexo II - Álgebra Linear e Geometria Analítica II

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Linear Algebra and Analytic Geometry II

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

## 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Carlos Manuel Saiago - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Resolver problemas de Álgebra Linear, mediante habilidades de cálculo básico e outras técnicas.
- Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conhecimentos, procedimentos, resultados e ideias matemáticas.
- Desenvolver a capacidade de identificar e descrever matematicamente um problema, estruturar a informação disponível e selecionar um modelo adequado.
- Aprender a falar, demonstrar e resolver em Matemática. Distinguir o que são as coisas de como se calculam.
- Alcançar o juízo crítico necessário para distinguir entre uma demonstração correta e outra que não é.
- Começar a enfrentar problemas que não são exercícios.
- Aplicar as técnicas da álgebra linear noutras áreas, em particular, na geometria analítica.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him:

- To solve Linear Algebra problems using basic calculus skills and other techniques.
- To communicate, orally or by writing, knowledges, procedures, results and mathematic ideas.
- To develop the skill of identify and mathematically describe a problem, to organize the disponible information and to select an acquire model.
- To learn how to speak, prove and solve in Mathematics. To distinguish what are the things from how they are calculate.

- To reach a needed critical judgement to distinguish between a correct proof and other that is not
- To start facing problems that are not exercises.
- To apply the linear álgebra techniques to other áreas, such as, to analytic geometry.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Espaços vetoriais complexos com produto interno. Decomposição "QR" de uma matriz. Teorema de Schur. Matrizes normais, hermíticas, reais e simétricas, unitárias e ortogonais e respetivos teoremas espetrais. Semelhança de matrizes e forma normal de Jordan.
- 2. Formas quadráticas: definição; forma polar; formas e matrizes definidas positivas, negativas e indefinidas; caracterização por meio dos valores próprios; critério dos menores principais. Decomposição dos valores singulares de uma matriz retangular. Método dos mínimos quadrados.
- 3. Geometria analítica em Rn: espaço afim (euclidiano); Subespaços afins; ponto, reta, plano e hiperplano. Paralelismo. Teoremas de incidência. Referenciais; Coordenadas de um ponto em relação a um referencial; Equações cartesianas e paramétricas. Problemas métricos: distância e ângulos entre espaços afins. Cónicas em R2 e quádricas em R3.

## 9.4.5. Syllabus:

- 1. Complex vector spaces with inner spaces. Matrix "QR" decomposition. Schur's theorem. Normal, hermitian, real and symmetric, unitary and orthogonal matrices and its spectral theorems. Matrix similarity and Jordan normal form.
- 2. Quadratic forms: definition; polar form; positive, negative definite and indefinite matrices; caracterization through eigenvalues; principal minors criterium. Rectangular matrix singular values decomposition. Least squares method.
- 3. Analytic geometry in Rn: affine space (euclidian); affine subspaces; points, line, plane and hyperplane. Parallelism. Incidence theorems. Frames. Point coordinates with respect to a frame; Cartesian and parametric equations. Metric problems: distance and angles between affine spaces. Conics in R2 and quadrics in R3.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Os tópicos do conteúdo programático têm como objetivo que o aluno saiba calcular a decomposição "QR" de uma matriz, os teoremas espetrais para vários tipos de matrizes e calcular a forma de Jordan, saiba reconhecer uma forma quadrática e descrevê-la matricialmente, saiba aplicar o método dos mínimos quadrados, saiba reconhecer um espaço afim, saiba calcular várias noções métricas, saiba identificar cónicas e quádricas e os seus elementos representativos.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics of the syllabus aim to provide that the student know how to give a "QR" decomposition of a matrix, the spectral theorem for several type of matrices and compute the Jordan form, to recognize a quadratic form and to describe it as a matrix, to apply the least squares method, to recognize an affine space, to compute several metric notions, to identify conics and quadrics and its representative elements.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas, nas sessões semanais destinadas ao atendimento dos estudantes ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor.

O estudante pode realizar a disciplina por avaliação contínua que consiste na realização de dois testes. Em caso de insucesso, o estudante pode ainda apresentar-se a exame.

Os alunos para serem avaliados têm de assistir a, pelo menos, 2/3 das aulas teóricas lecionadas e 2/3 das aulas práticas lecionadas.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process.

Students can ask questions during the classes, in weekly scheduled sessions or in special sessions accorded directly with the professor.

There are two mid-term tests that can substitute the final exam in case of approval. Otherwise the student must pass the final exam.

In order to be evaluated, students must attend, at least, 2/3 of the lectures and 2/3 of the problem-solving classes.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

A quase totalidade dos resultados é apresentada com a respetiva demonstração.

Antes de se expor a teoria de cada capítulo, o aluno tem à sua disposição textos de apoio e as respetivas folhas de exercícios. Alguns destes exercícios serão resolvidos em aula. A resolução dos restantes faz parte do trabalho pessoal do aluno.

### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process.

Most results are proven. Students have access to copies of the theory and proposed exercises. Some of the exercises are solved in class, the remaining are left to the students as part of their learning process.

### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

"Introdução à Álgebra Linear", Ana Paula Santana e João Filipe Queiró 2010 Gradiva, Lisboa

"Geometria Analítica e Álgebra Linear", Elon Lages Lima 2015 Coleção Matemática Universitária, IMPA

"Linear Algebra and its Applications", Gilbert Strang 2006, 4ª edição Thomson Brooks/Cole, California

### Anexo II - Análise Real I

### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Análise Real I

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Real Analysis I

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

## 9.4.1.6. ECTS:

6

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

## 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Ana Margarida Fernandes Ribeiro – TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam compreender conceitos fundamentais de Análise, dominando técnicas que lhe permitam realizar provas de resultados simples no âmbito da unidade curricular.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him to understand fundamental concept in Analysis, mastering the techniques to do mathematical proofs of simple results in the context of the curricular unit.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Axioma do supremo e densidade dos racionais e dos irracionais. Noções Topológicas.
- 2. Sucessões de números reais: definição de limite e revisão de resultados relativos à convergência de sucessões. Subsucessões, limite superior e inferior, teorema de Bolzano-Weierstrass. Sucessões de Cauchy.
- 3. Séries numéricas: séries de termos não negativos, séries alternadas, convergência absoluta.
- 4. Funções de variável real: definição de limite segundo Cauchy e segundo Heine, teorema da função inversa, teorema de Weierstrass, teorema do ponto fixo de Picard, continuidade uniforme e teorema de Cantor.
- 5. Sucessões de funções: convergência pontual e convergência uniforme, resultados relativos ao limite de funções contínuas, ao limite de integrais de sucessões de funções (observando a construção rigorosa do integral de Riemann)

- e ao limite das derivadas de sucessões de funções.
- 6. Séries de funções: convergência pontual e uniforme, séries de potências, funções analíticas e séries de Taylor.

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Supremum axiom and density of rational and irrational numbers on R. Topological notions.
- 2. Sequences of real numbers: limit definition, review on convergence results. Subsequences, superior and inferior limit of a sequence, Bolzano-Weierstrass theorem. Cauchy sequences.
- 3. Series of real numbers: series with nonnegative terms, series with alternating signs, absolute convergence.
- 4. Functions of real variable: Cauchy and Heine limit definitions, inverse function theorem, Weierstrass theorem, fixed point Picard theorem, uniform continuity, Cantor theorem.
- 5. Sequences of functions: pointwise and uniform convergence, limits of sequences of continuous functions, limits of sequences of integrals (observing the rigorous construction of Riemann integral).
- 6. Series of functions: pointwise and uniform convergence, power series, analytic functions and Taylor series.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Os conteúdos programáticos incidem todos eles sobre conceitos e resultados fundamentais de Análise e, alguns deles, têm provas simples que permitem ao estudante praticar o manuseio desses conceitos.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Listed in the syllabus are fundamental concepts and results in Analysis. Some of the topics have simple proofs enabling the student to practice the concepts and mastering the techniques.

#### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas com exposição oral dos conceitos e resultados que são acompanhados das respetivas demonstrações. É sugerida uma lista de exercícios para serem trabalhados autonomamente que inclui problemas com um cariz teórico. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts and results together with their proofs and complemented with examples and applications. A list of exercises that includes several theoretical problems is provided to the students to be solved independently. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição teórica dos conteúdos programáticos e em particular as demonstrações dos resultados permite que o estudante se familiarize com técnicas para manusear os conceitos em estudo. Sendo objetivo desta ÚC o desenvolvimento de competências para realizar provas matemáticas, é fundamental a confrontação do estudante com problemas teóricos a serem resolvidos autonomamente.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The contact with the proofs of the results under study allows the student to know the techniques used in the field. As a learning outcome of this curricular unit is the development of skills to do a mathematical proof in Analysis, it is fundamental the independent practice through some problem solving.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- J. Campos Ferreira, Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.
- M. Figueira, Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de matemática, Dep. de matemática da FCUL, 1996.
- K. Ross, Elementary Analysis The Theory of Calculus, Second Edition, Springer, 2013.
- E. Lages Lima, Curso de Análise vol. 1, 14ª ed., IMPA, 2012.
- M. Spivak, Calculus, 3rd edition, Publish or Perish Inc., 2006.

# Anexo II - Cálculo II

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Cálculo II

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

#### 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Paula Cristiana Costa Garcia Silva Patrício - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam (i) conhecer os conceitos e aplicações fundamentais do cálculo vetorial e de funções de várias variáveis reais, (ii) ter uma capacidade de visualização tridimensional desenvolvida, (iii) compreender a complexidade acrescida de manusear funções de várias variáveis face a funções de uma só variável, (iv) reconhecer nos métodos estudados para funções de uma variável uma motivação para desenvolver técnicas apropriadas para estudar funções de várias variáveis reais.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student must have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to know the fundamental concepts and applications of vectorial calculus and of functions of several variables, (ii) to have a developed tridimensional visualization aptitude, (iii) to understand the complexity of working with functions of several variables with respect to functions of one variable, (iv) to recognize on the methods studied to functions of one real variable a motivation to develop suitable techniques to study functions of several variables.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Secções cónicas, coordenadas polares e equações paramétricas.
- 2. Cálculo vetorial: campos vetoriais, curvas e comprimento de arco, movimento curvilíneo.
- 3. Funções de várias variáveis: superfícies quádricas, gráficos, curvas e superfícies de nível, limites e continuidade, coordenadas cilíndricas e esféricas.
- 4. Gradiente, derivadas direcionais, plano tangente e diferenciabilidade. Teorema de Taylor.
- 5. Extremos relativos e extremos condicionados de funções de várias variáveis. Multiplicadores de Lagrange.
- 6. Integrais duplos e triplos, teorema de Fubini e mudança de variáveis.
- 7. Integrais de linha e de superfície, trabalho e fluxo através de uma superfície.
- 8. Divergente, rotacional, teorema de Green, teorema da divergência e teorema de Stokes.

### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Conic sections, polar coordinates and parametric equations.
- 2. Vectorial calculus: vectorial fields, curves and arc length, curvilinear motion.
- 3. Functions of several variables: quadric surfaces, graphs, level curves and level surfaces, limits and continuity, cylindrical and spherical coordinates.
- 4. Gradient, directional derivatives, tangent plane and differentiability. Taylor's theorem.
- 5. Extreme values of functions of several variables. Lagrange multipliers.
- 6. Double and triple integrals, Fubini's theorem and change of variables.
- 7. Line and surface integrals, work, and flux through a surface.
- 8. Divergence and curl, Green's theorem, divergence theorem, and Stokes theorem.

#### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os conteúdos programáticos enumerados permitem atingir os objetivos descritos nos items (i) e (ii). Este último é hoje facilmente alcançado graças aos meios computacionais atualmente vulgarizados. Relativamente aos objetivos (iii) e (iv), refira-se a título de exemplo, tópicos como o conceito de limite, continuidade ou diferenciabilidade de funções de várias variáveis. Estes são conceitos onde é manifesta a complexidade do estudo deste tipo de funções e que encontram nos respetivos conceitos para funções de uma variável a sua motivação. Assim, a sua inclusão no programa é coerente com os objetivos patentes em (iii) e (iv).

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics listed in the unit's syllabus lead to the learning objectives described in (i) and (ii). This last objective is today easily achieved due to the computational means that are nowadays easily accessible. With respect to the objectives (iii) and (iv), we mention as an example, topics as the concept of limit, continuity, and differentiability of functions of several variables. These are concepts where it is clear the complexity to treat functions of several variables and that find their motivation on functions of one variable. Therefore, these being part of the syllabus brings coherence with the goals (iii) and (iv).

#### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas com exposição oral dos conceitos e resultados, e devidamente complementados com exemplos e aplicações. Algumas demonstrações, ou ideias de demonstração, são também apresentadas. É sugerida uma lista de exercícios e problemas para serem resolvidos autonomamente. O estudante será incentivado a utilizar meios computacionais para acompanhar os tópicos a tratar. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts and results and complemented with examples and applications. Sometimes proofs or hints for the proof are presented. A list of exercises and problems is provided to the students to be solved independently. The student is encouraged to use computational means supporting the topics under study. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição dos conteúdos programáticos acompanhada de exemplos ilustrativos permite ao estudante praticar em autonomia os conteúdos expostos, sendo sugerida uma lista de exercícios e problemas cumprindo os objetivos de aprendizagem das matérias da unidade curricular. O uso de meios computacionais gráficos permite desenvolver a capacidade de visualização tridimensional.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The exposition of the syllabus, illustrated with examples, prepares the student to practice independently the subjects studied. A list of exercises and problems covering the calculus learning outcomes and reasoning development is provided. The use of computational graphical means enables the student to develop his/her tridimensional visualization skills.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- H. Anton, I. Bivens & S. Davis, Calculus, 8th edition, John Wiley & Sons, 2005.
- S. Salas, E. Hille, G. Etgen, Calculus One and Several Variables, 10th edition, John Wiley & Sons, 2007.
- G. Simmons, Calculus with Analytic Geometry, 2nd edition, McGraw Hill, 1996.

## Anexo II - Geometria

### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Geometria

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Geometry

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Ana Cristina Malheiro Casimiro - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Conhecer e compreender alguns dos principais resultados da Geometria Euclidiana
- Desenvolver aptidão para a resolução de problemas geométricos e não sistemáticos
- Ser capaz de visualizar no espaço

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him:

- To know and understand some of the principal results on the Euclidean
- To develop skills to solve geometric problems and no systematic ones
- To be able to visualize in the space

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Geometria axiomática: introdução, geometria de incidência, axiomas para a geometria no plano, ângulos e triângulos, modelos da geometria neutra (modelo cartesiano, modelo do disco de Poincaré), axioma das paralelas (equivalência com a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180°).
- 2. Construções com régua e compasso: construções básicas, construção de polígonos regulares, construções impossíveis.
- 3. Grupos de transformações no plano e espaço euclidiano: afinidades, semelhanças e isometrias e a sua classificação.
- 4. Geometrias não euclidianas: modelos dos planos projetivo ou elíptico (esfera) ou hiperbólico (escolher uma das 3 geometrias)

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Axiomatic geometry: introduction, incidence geometry, axioms for plane geometry, angles, triangles, models of neutral geometry (cartesian model, Poincaré disk model), parallel axiom (equivalence with the sum of the inner angles of a triangle is 180°).
- 2. Straightedge and compass constructions: basic constructions, construction of regular polygons, impossible constructions.
- 3. Groups of transformations in the plane and in the Euclidean space: affinities, similarities and isometries and its classification
- 4. Non-Euclidean geometries: models of the projective or elliptic or hyperbolic planes (to choose one of the 3 aeometries)

## 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os tópicos do conteúdo programático têm como objetivo que o aluno conheça e compreenda a construção da Geometria ao longo da história, disciplina de extrema importância para um matemático, permitindo também que o aluno desenvolva o seu raciocínio na resolução de problemas geométricos e que melhore a sua visualização no espaço. Por outro lado, permitem que o aluno adquira aptidões para resolver problemas não sistemáticos.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics of the syllabus aim to provide that the student know and understand the construction of Geometry along History, because this is a very important subject for a mathematician, also allowing for the student to develop its reasoning when solving geometric problems and to improve its space visualization. On the other hand, the topics allow the student to acquire skills to solve nonsystematic problems.

#### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas, nas sessões semanais destinadas ao atendimento dos estudantes ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor.

O estudante pode realizar a disciplina por avaliação contínua que consiste na realização de dois testes. Em caso de insucesso, o estudante pode ainda apresentar-se a exame.

Os alunos para serem avaliados têm de assistir a, pelo menos, 2/3 das aulas teóricas lecionadas e 2/3 das aulas práticas lecionadas.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process.

Students can ask questions during the classes, in weekly scheduled sessions or in special sessions accorded directly with the professor.

There are two mid-term tests that can substitute the final exam in case of approval. Otherwise the student must pass the final exam.

In order to be evaluated, students must attend, at least, 2/3 of the lectures and 2/3 of the problem-solving classes.

### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

A quase totalidade dos resultados é apresentada com a respetiva demonstração.

Antes de se expor a teoria de cada capítulo, o aluno tem à sua disposição textos de apoio e as respetivas folhas de exercícios. Alguns destes exercícios serão resolvidos em aula. A resolução dos restantes faz parte do trabalho pessoal do aluno.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process. Most results are proven. Students have access to copies of the theory and proposed exercises. Some of the exercises are solved in class, the remaining are left to the students as part of their learning process.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

"Curso de Geometria", Paulo Ventura Araújo, Trajectos Ciência, 1998, Gradiva

"Geometry and symmetry", L. Christine Kinsey, T. E. Moore, E. Prassidis 2011, John Wiley and Sons

"Geometry, ancient and modern", J.R. Sylvester, 2001, Oxford Univ. Press

"Axiomatic Geometry", John M. Lee, 2013, American Mathematical Society

"Continuous Symmetry- From Euclid to Klein", W. Barker e R. Howe, 2007, American Mathematical Society

# Anexo II - Probabilidades e Estatística I

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Probabilidades e Estatística I

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Probability and Statistics I

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

## 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Carlos Manuel Agra Coelho - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Dar aos alunos as bases necessárias em probabilidades de modo a se poderem facilmente relacionar com as principais distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias e poderem entender o sentido de alguns dos principais resultados relativos a operações sobre variáveis aleatórias, nomeadamente somas, de modo a ser possível formar uma base sólida para a correta utilização dos processos de estimação e inferência básicos, nomeadamente os relativos a testes a proporções, médias, variâncias, quantis e medianas de variáveis aleatórias, lecionados na Disciplina de Probabilidades e Estatística II.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

Give the students a good background in probability so that they will be able to easily relate with the most common probability distributions of both categorical and continuous random variables, allowing them to better understand the meaning of some of the more important results pertaining operations on probabilities and on random variables, namely sums of these latter ones, in order to be possible to build a solid background for a correct use of the basic estimation and inference procedures, namely the ones on proportions, means, variances, quantiles and medians, taught in the Course Probability and Statistics II.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Cálc. Combinatório (rev.)
- 2 Teoria Elem. da Prob.: Evento e Espaço de ev.'s; conceito de Prob.: propriedades; prob. cond. e independência de eventos; Teor. de Bayes e da Prob. Total; aplicações; Lemas Borel-Cantelli.
- 3 V.a.'s e Distribuições de Prob.: def. de v.a.; f.'s de distribuição; propriedades; quantis; valor esperado: propriedades. Momentos. Desig.'s envolvendo momentos. F.g.m.'s e f.c.'s. A dist. de Y=g(X)
- 4 Dist.'s conjuntas e condicionais: mom.'s conjuntos e marginais; a f.g.m. conjunta; independência de v.a.'s. Momentos condicionais; o valor esperado cond.. A dist. de (Y1,Y2)=g(X1,X2). As dist.'s da soma, difer., prod. e quoc. de 2 v.a.'s
- 5 V.a.'s Disc.s: Unif., Bernoulli, Binomial, Geométrica, Binomial Neg., Hipergeométrica, Poisson
- 6 V.a.'s Cont.s: Exponencial, Gama, Normal, Qui-quadrado, T, F.
- 7 Breve ref. a dists. Multivariadas: Multinomial e Normal Multiv.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1 Combinatorics (rev.)
- 2 Elem's of Prob. Theory: Event and ev. space; the concept of Prob.: properties; cond. prob. and independence of events; Bayes and Total Prob. Theor.'s; appl's; Borel-Cantelli Lemmas.
- 3 R.v.'s and Prob. distributions: def. of r.v.; distribution functions; properties; quantiles; expected value: properties. Moments. Ineq.'s involving moments. M.g.f.'s and c.f.'s. The distribution of Y=g(X)
- 4 Joint and condit. dist.'s: joint and marginal mom.'s; the joint m.g.f.; independence of r.v.'s. Condit. moments; the condit. expected value. The dist. of (Y1,Y2)=g(X1,X2). The distributions of the sum, difference, product and ratio of two r.v.'s
- 5 Disc. r.v.'s: Unif., Bernoulli, Binomial, Geometric, Neg. Binomial, Hipergeometric, Poisson
- 6 Cont. r.v.'s: Exponential, Gamma, Normal, Chi-square, T, F.
- 7 Brief ref. to multiv.dists.: Multinomial and multiv. Normal

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático desta Disciplina entronca diretamente e constrói a devida sequência relativamente ao conteúdo programático da Disciplina de Probabilidades e Estatística II, conduzindo os alunos à construção de sólidas formas de estimação e de realização de testes a variados parâmetros de distribuições, proporcionando-lhes assim, no conjunto das duas Disciplinas um percurso conducente a uma sólida formação, desde as bases das Probabilidades, passando pelas distribuições de variáveis aleatórias e funções destas, como somas e diferenças, até à aplicação dos conceitos e resultados aprendidos em termos de estimação na execução, de forma segura e consciente, de variados testes de hipóteses.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The programmatic contents of this course directly connects and builds the appropriate sequence with respect to the course of Probability and Statistics II, leading the students to ways of building solid forms of estimation and testing of hypotheses for various parameters of distributions of r.v.'s. The two courses together, will give students a solid formation from the bases of Probability, passing through the distributions of r.v.'s and functions of these, as sums and differences, till the application of the learned results in terms of estimation to the practical implementation, in conscious and solid terms, of a variety of tests of hypotheses.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois ou três testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two or three tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it in an additional assessment.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Só com um conjunto bem elaborado e devidamente sequenciado de Aulas Teórico-práticas, onde são introduzidos os principais conceitos e resultados formais, seguidos de perto por resoluções de problemas intimamente relacionados com os conceitos e resultados introduzidos, será possível lecionar um conjunto de matérias que os alunos têm de apreender, consolidar e interiorizar, devidamente, de forma a ficarem habilitados com os devidos conhecimentos de base sobre Probabilidade e Variáveis aleatórias, de forma não só a cumprirem os objetivos da disciplina como também a ficarem com a devida base de conhecimentos para a futura Disciplina de Probabilidades e Estatística II. O conteúdo programático desta Disciplina é assim considerado o mais adequado para a realização destes objetivos.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

Only with a well planned and duly sequenced set of theoretical/practical classes, where the main concepts and results are introduced, closely followed by problem, intimately related with the concepts and results introduced, that are solved with the active student participation, it will be possible to the students to acquire the required knowledge and know-how in order to be able to understand the basic concepts of Probability and random variables and the associated techniques, fulfilling this way the course objectives and building a solid basis for the future course of Probability and

The course syllabus seems to be the most adequate in order to fulfill these objectives.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Coelho, C. A. (2008). Tópicos em Probabilidades e Estatística, Vol. I, Vol. II (Cap.s 6,7).

Mood, A. M., Graybill, F. A. e Boes, D. C. (1974). Introduction to the Theory of Statistics, 3a ed., J. Wiley & Sons, New York.

Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (1998). Applied Statistics and Probability for Engineers, 2a ed., J. Wiley & Sons, New York.

Ross, S. M. (1999). Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists. J Wiley & Sons, New York. Murteira, B. J. F. (1990). Probabilidades e Estatística, Vol I, 2ª ed., McGraw-Hill Portugal, Lisboa.

Rohatqi, V. K. (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. J. Wiley & Sons, New York.

# Anexo II - Álgebra I

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Álgebra I

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Algebra I

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

João Jorge Ribeiro Soares Gonçalves de Araújo - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências em teoria de grupos e de anéis.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills on the theories of groups and rings.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Generalidades sobre semigrupos incluindo teoremas do tipo de Cayley para semigrupos e grupos. Estudo de semigrupos de transformações e grupos de permutações assistido por computação simbólica. Prova de que todo o semigrupo finito tem um idempotente usando os teoremas de Ramsey e Schur. Introdução à demonstração automática de teoremas.
- 2. Resultados básicos de teoria de grupos incluindo a prova do Teorema de Sylow e da decomposição de grupos finitos abelianos como soma direta de grupos cíclicos.
- 3. Resultados básicos da teoria de anéis e corpos: subanéis, anéis quociente e homomorfismos, fatorização.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. General results on semigroups; theorems of Cayley type; transformation semigroups and permutation groups assisted by symbolic computation; Ramsey and Schur theorems and the corollary that every finite semigroup has an idempotent.
- 2. Basic group theory results including Sylow Theorem and the decomposition theorem for finite commutative groups.
- 3. Basic results on rings and fields.

#### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Em qualquer um dos tópicos serão apresentados os teoremas elementares da área bem como as respetivas demonstrações. Para cada teorema vamos tentar dar a prova mais elegante e transparente de forma a que os alunos, mais do que conhecerem enunciados de teoremas, se apropriem de técnicas utilizáveis em outros contextos e situações.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The theorems of each area will be presented with appropriate proofs. For the main theorems we will try to provide the proofs that grant the deepest insight in order to equip students with tools that can be used in different areas, contexts and situations.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas bem como sessões hands on em GAP. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Continuous assessment is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous assessment he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de pensar em questões de álgebra abstrata.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modeling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- M. Artin, Algebra. New Jersey, Prentice Hall, 1991.
- P. J. Cameron, Notes on algebraic structures, https://cameroncounts.files.wordpress.com/2013/11/algstr.pdf
- J. Rotman, An introduction to the theory of groups, Springer, 1991.
- D. Dummite & R. Foote, Abstract algebra, John Wiley & Sons, 2004.
- J. M. Howie, Fundamentals of semigroup theory, London Mathematical Society, 1996.
- GAP tutorial. https://www.gap-system.org/Manuals/doc/tut/chap0.html

#### Anexo II - Análise Numérica

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Análise Numérica

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Numerical Analysis

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

## 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

6

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

## 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Magda Stela de Jesus Rebelo - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitem (i) aproximar uma função usando interpolação e o método dos mínimos quadrados (ii) aproximar o valor de um integral definido usando regras de integração numérica (iii) aproximar a solução de uma equação não linear e (iv) usar métodos diretos e iterativos para aproximar a solução de um sistema de equações lineares. Além disso, o estudante deverá ser capaz de implementar, usando uma linguagem de programação, os métodos numéricos abordados e interpretar os resultados numéricos obtidos.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to approximate a function using interpolation and least squares approximations (ii) to obtain an approximation, using quadrature rules, of a definite integral (iii) to approximate the solution of a nonlinear equation (iv) use direct and iterative methods to approximate the solution of a linear system. Furthermore, the student should be able to implement, using a programming language, the algorithms related with the numerical methods and analyze the numerical results obtained.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Introdução à Análise Numérica e à Teoria de Erros: Erros, casas decimais significativas e algarismos significativos. Condicionamento de um problema. Estabilidade de um método.
- 2. Interpolação e Aproximação de Funções: Interpolação polinomial, interpolação trigonométrica, interpolação por splines cúbicos, método dos mínimos quadrados.
- 3. Integração Numérica: Fórmulas de integração de Newton-Cotes simples e compostas, método de integração de Gauss.
- 4. Resolução de Equações Não Lineares: Método da bissecção, método do ponto fixo, método de Newton, método da secante.
- 5. Álgebra Linear Numérica: Normas de vector e matriz, condicionamento de um sistema, métodos directos para resolução de sistemas de equações lineares, valores e vectores próprios, teorema de Gershgorin. Métodos iterativos para o cálculo de valores e de vectores próprios. Métodos iterativos para resolução de sistemas de equações lineares.

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Introduction to Numerical Analysis and Error Theory: Errors, significant digits. Conditioning of a problem and stability of a method.
- 2. Interpolation and Function Approximation: Polynomial interpolation, trigonometric interpolation, cubic spline interpolation, least squares approximation.
- 3. Numerical Integration: Newton-Cotes integration formulas, Gaussian integration.
- 4. Root finding for Nonlinear Equations: Bisection method, fixed-point iteration method, Newton's method and secant method.
- 5. Numerical Linear Algebra: Norms of vectors and matrices, conditioning of a system, direct methods for the solution of systems of linear equations, eigenvalues and eigenvectors, Gershgorin's theorem. Iterative methods for computing eigenvalues and eigenvectors. Iterative methods for solving a linear system of equations.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Em qualquer um dos tópicos do programa serão lecionados os conceitos, deduzidos os métodos numéricos bem como implementados e aplicados a exemplos concretos. O ponto 1 do programa é transversal à área de Análise Numérica. Os pontos 2-5 do programa cumprem os objetivos (i)-(iv), respetivamente.

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

In either topic of the syllabus, the concepts will be taught, the numerical methods will be deduced as well as implemented and applied to concrete examples. Bullet 1 of the syllabus id transversal to Numerical Analysis. Bullets 2-5 of the syllabus allow to achieve the outcomes (i)-(iv), respectively.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias, devidamente complementada com exemplos, resoluções de problemas e implementação em computador dos métodos estudados. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes e dois trabalhos computacionais. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, examples, complemented with problem solving and implementation of the numerical methods studied. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests and two computational projects. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação dos conceitos e métodos numéricos, apoiada com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados e desenvolver a sua capacidade de aplicar, de forma adequada, os métodos estudados. A componente de implementação computacional permite a resolução de problemas mais desafiantes, com a consequente interpretação crítica dos resultados obtidos.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and numerical methods are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study and developing student's ability to properly apply the studied methods. The component related with the numerical implementation allows to address more challenging problems, with the consequent critic interpretation of the results obtained.

Students can test these skills in classes, under the supervision of a professor, or by themselves, scheduling individual appointments with professors, in case of difficulties.

The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. R. Burden, D. Faires, Numerical Analysis, 9th edition, Brooks-Cole Publishing, 2011.
- 2. J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997.
- 3. D. Kincaid, W. Cheney, Numerical analysis: mathematics of scientific computing, 3rd edition, Brooks-Cole Publishing, 2002.
- 4. R. Kress, Numerical Analysis, Graduate Texts in Mathematics 181, Springer, 1998.

#### Anexo II - Análise Real II

### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Análise Real II

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Real Analysis II

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:84

## 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Cláudio António Aires Rainha Fernandes - TP:84

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam (i) compreender que a completude de R estudada anteriormente é caraterística comum a R^n e a importância desta propriedade para problemas da otimização e da resolução de equações, (ii) manusear de um ponto de vista analítico e abstrato conceitos e resultados estudados numa perspetiva de cálculo na UC Cálculo II, (iii) fazer a transição para o contexto mais abstrato de espaço métrico familiarizando-se com noções topológicas nestes espaços e compreendendo a sua possível falta de completude.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to understand that the completeness of R previously studied is a common characteristic to R^n and the importance of this property to optimization problems and equations, (ii) to deal with concepts and results previously studied from a calculus perspective in the curricular unit Cálculo II, from an analytic and abstract point of view, (iii) to make a transition to the more abstract context of metric spaces being acknowledged with topological notions in these spaces and understanding its possible lack of completeness.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. O espaço Euclideano R^n, R^n como espaço normado e como espaço métrico.
- 2. Normas equivalentes.
- 3. Sucessões e limites de sucessões em R^n, teorema de Bolzano-Weierstrass, sucessões de Cauchy e completude de
- 3. Topologia em R^n: conjuntos abertos e conjuntos fechados.
- 4. Continuidade de funções definidas em R^n, teorema de Weierstrass e teoremas de ponto fixo. Aplicações.
- 5. Equivalência das normas de R^n.
- 6. Diferenciabilidade de funções de várias variáveis.
- 7. Teorema das funções implícitas e teorema da função inversa. Aplicações à Geometria e à Otimização.
- 9. Conceito de espaço métrico e possível falta de completude, conjuntos sequencialmente compactos, conjuntos compactos, conjuntos precompactos e conjuntos completos.

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. The Euclidean space R^n, R^n as a normed space and as a metric space.
- 2. Equivalent norms.
- 3. Sequences and limits of sequences in R<sup>n</sup>, Bolzano-Weierstrass theorem, Cauchy sequences and completeness of R^n.
- 3. Topology in R<sup>n</sup>: open and closed sets.
- 4. Continuity of functions defined in R^n, Weierstrass theorem and fixed point theorems. Applications.
- 5. Equivalence of norms in R^n.
- 6. Differenciability of functions defined in R^n.
- 7. Implicit and inverse function theorem. Applications to Geometry and to Optimization.
- 9. Metric spaces and possible lack of completeness, sequentialy compact sets, compact sets, precompact sets and complete sets.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular O alinhamento estabelecido nos conteúdos programáticos 1-9 contribuem coerentemente para atingir os objetivos (i)-(iii).

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics listed in the syllabus 1-9 coherently provide to achieve the learning objectives (i)-(iii).

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas com exposição oral dos conceitos e resultados que são acompanhados das respetivas demonstrações. O estudante é incentivado a expor e a discutir os tópicos estudados. É sugerida uma lista de exercícios para serem trabalhados autonomamente. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts and results together with their proofs and complemented with examples and applications. The student is encouraged to present and discuss the topics under study. A list of exercises is provided to the students to be solved independently. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição teórica dos conteúdos programáticos, e em particular as demonstrações dos resultados, permitem que o estudante se familiarize com as técnicas para manusear os conceitos em estudo. Tendo esta UC um cariz

predominantemente teórico, é fundamental a exposição e discussão dos conteúdos pelos estudantes assim como a confrontação com a resolução de fichas de trabalho que permitam ao estudante testar a sua compreensão das matérias.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The contact with the proofs of the results under study allows the student to know the techniques used in the field. As this curricular unit is mainly theoretical, it is fundamental the presentation and discussion of the topics by the student as well as the independent practice through some problem solving.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

W. Fleming, Functions of Several Variables, second edition, Springer, 1977. L. Loomis, S. Sternberg, Advanced Calculus, Jones and Bartlett Publishers, 1990.

#### Anexo II - Probabilidades e Estatística II

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Probabilidades e Estatística II

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Probability and Statistics II

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Filipe José Gonçalves Pereira Margues - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Dotar os alunos de um conhecimento sólido nas áreas da Estimação pontual e intervalar, de modo a poderem facilmente levar a cabo e definir testes de hipóteses e determinar intervalos de confiança para parâmetros de distribuições e populações baseados quer em pequenas quer em grandes amostras, bem como dotá-los da capacidade de realizarem estudos sobre as distribuições, quer exatas quer assintóticas, de uma variedade de estatísticas amostrais.

Será exatamente a obtenção dos conhecimentos e aptidões acima referidas, enquadradas no âmbito do programa da disciplina, que será o objeto da avaliação desta disciplina.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

Give the students a solid knowledge in the areas of point and interval estimation, which may allow them to carry out and define testing procedures and confidence intervals for distribution and population parameters, based either on small or large samples, as well as provide them with the necessary skills to study and obtain the exact or asymptotic distributions of a range of sample statistics.

The objective of the evaluation in this course will be exactly the evaluation of the obtainment of the above mentioned knowledge and skills, duly placed within the course program and syllabus.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

Cap. 1 - Convergência de v.a.s

Conv. em distribuição e probabilidade: TLCs, Teor. da continuidade, Lei Fraca dos Grandes Números

Conv. de momentos

Conv. em média de ordem h

Conv. com probabilidade 1 - Lei Forte dos Grandes Números

Cap. 2 - Distribuição de Estatísticas Amostrais

Cap. 3 – Estimação pontual

Método dos momentos, Máxima Verosimilhança, Mínimos Quadrados, Outros

Estimadores: Centragem, Consistência, Suficiência, Plenitude, Eficiência

BLUEs, UMVUEs, O limite de Cramer-Rao

Cap. 4 – Estimação intervalar

Intervalos de Confiança. Definição e métodos de determinação

Intervalos de Confiança para amostras grandes

Cap. 5 – Testes de hipóteses

**Fundamentos** 

Teste mais potente. Lema de Neyman-Pearson

Testes de razão de verosimilhanças

Cap. 6 – Aplicações

Intervalos de Confiança e Testes para a média e variância de populações Normais

Testes Qui-quadrado de independência e ajustamento

Testes de ajustamento à Normal

# 9.4.5. Syllabus:

Chap. 1 - Convergence of r.v.s

Conv. in distribution and probability: CLTs, Continuity Theor., Weak Law of Large Numbers

Conv. of moments

Conv. in h-th mean

Conv. with probability 1 - Strong Law of Large Numbers

Chap. 2 - Distribution of Sample Statistics

Chap. 3 – Point Estimation

Method of moments, Maximum Likelihood, Least Squares, Other

Estimators: Unbiased, Consistent, Sufficient, Completeness, Efficient

BLUEs, UMVUEs, Cramer-Rao lower bound

Chap. 4 - Interval Estimation

Confidence Intervals. Definition and derivation methods

Confidence Intervals for large samples

Cap. 5 - Hypotheses Testing

**Foundations** 

Most powerful test. Neyman-Pearson Lemma

Likelihood ratio tests

Chap. 6 – Applications

Confidence Intervals and Tests for the mean and variance of Normal populations

Chi-square tests of independence and goodness-of-fit

Goodness-of-fit tests for the Normal

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Começando pela apresentação das mais importantes formas de convergência de v.a.s e principais resultados e Teoremas relacionados, como os TLCs e as Leis Fraca e Forte dos Grandes Números, passa-se à análise e estudo das distribuições exatas e assintóticas de estatísticas amostrais, com particular ênfase nas estatísticas ordinais, com a finalidade de chegar ao estudo dos estimadores, os quais sendo sempre estatísticas amostrais, são também frequentemente estatísticas ordinais. Particular atenção será dada às mais importantes propriedades dos estimadores, como sejam a centragem, consistência, plenitude e eficiência. Com base nestes conhecimentos, será então possível definir diferentes estratégias ótimas para a construção de intervalos de confiança e testes associados para parâmetros de várias populações, uns e outros baseados em estatísticas com determinadas distribuições conhecidas e com determinadas propriedades ótimas.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Starting with the presentation of the most important forms of convergence of r.v.s and main related results and Theorems, as TLCs and the Weak and strong Laws of Large Numbers, we will get to the study of the exact and asymptotic distributions of sample statistics, with particular emphasis on the ordinal statistics. All this with the aim of reaching the study of estimators, which being always sample statistics, are also quite often ordinal statistics. Special attention will be given to the study of the most important properties of estimators as unbiasedness, consistency, completeness and efficiency. Based on this knowledge it will then be possible to be able to define optimal strategies for the construction of confidence intervals and associated tests for different population and distribution parameters, both of them based on statistics which have known distributions and optimal properties.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois ou três testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two or three tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it in an additional assessment.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Só com um conjunto bem elaborado e devidamente sequenciado de aulas Teórico-práticas, onde são introduzidos os principais conceitos e resultados formais e onde são resolvidos problemas intimamente relacionados com os conceitos e resultados introduzidos, será possível lecionar um conjunto de matérias que os alunos têm de apreender, consolidar e, digamos, quase que interiorizar, devidamente, de forma a ficarem habilitados com os devidos conhecimentos que lhes possibilitem cumprirem os objetivos da disciplina.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

Only with a well planned and duly sequenced set of theoretical/practical classes, where the main concepts and results are introduced and followed by problems, intimately related with the concepts and results introduced, that are solved with the active student participation, it will be possible to the students to acquire the required knowledge and knowhow in order to fulfill the course objectives.

### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Coelho, C. A. . Tópicos em Probabilidades e Estatística, Vol. II, Cap. 8 e 9

Coelho, C. A., Tópicos em Probabilidades e Estatística, Vol. III.

Mood, A. M., Graybill, F. A. e Boes, D. C. (1974). Introduction to the Theory of Statistics, 3ed. McGraw-Hill, New York Rohatgi, V. K. (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, J. Wiley & Sons, New York

### Anexo II - Álgebra II

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Algebra II

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Algebra II

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

# 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

## 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Gonçalo Jorge Trigo Nery Tabuada - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências em teoria de módulos e corpos e em teoria de Galois.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills on the theories of modules and fields and also on Galois theory.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Teoria de módulos: definições, teoremas de estrutura e aplicações a operadores lineares.
- 2. Teoria de corpos: definições, construções com régua e compasso, corpos finitos e corpos de funções.
- 3. Teoria de Galois: definições, resultado principal de Galois, extensões de Kummer e extensões ciclotómicas.

## 9.4.5. Syllabus:

- 1. Theory of modules: definitions, structure theorems and applications to linear operators
- 2. Theory of fields: definitions, constructions with ruler and compass, finite fields and function fields.
- 3. Galois theory: definitions, main result of Galois, Kummer extensions and cyclotomic extensions.

## 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Em qualquer um dos tópicos serão apresentados os teoremas elementares da área bem como as respetivas demonstrações. Para cada teorema vamos tentar dar a prova mais elegante e transparente de forma a que os alunos, mais do que conhecerem enunciados de teoremas, se apropriem de técnicas utilizáveis em outros contextos e situações.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The theorems of each area will be presented with appropriate proofs. For the main theorems we will try to provide the proofs that grant the deepest insight in order to equip students with tools that can be used in different areas, contexts and situations.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Continuous assessment is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous assessment he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de pensar em questões de álgebra

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modeling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

M. Artin, Algebra. New Jersey, Prentice Hall, 1991.

N. Jacobson, Basic Algebra I. W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

S. Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 211, Springer-Verlag (2002).

#### Anexo II - Análise Complexa

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Análise Complexa

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Complex Analysis

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

João Pedro Bizarro Cabral - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Compreender que o corpo complexo, do ponto de vista da topologia e da continuidade de funções, é análogo ao espaço vetorial real de dimensão 2, e que a estrutura diferencial de funções de variável complexa é mais forte do que em funções de variável real.
- Perceber a noção geométrica de homotopia de curvas. Calcular integrais de linha de funções de variável complexa e conhecer as suas propriedades, o teorema de Cauchy e os teoremas fundamentais da análise complexa que dele derivam.
- Conhecer os desenvolvimentos de Taylor e de Laurent e suas aplicações. Compreender que a estrutura local em termos de séries de potências de funções de variável complexa é mais forte do que em funções de variável real.
- Compreender as questões geométricas associadas ao conceito de transformações conformes.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student must have acquired knowledge, skills and powers to:

- Understand that the complex field is analogous to the 2 dimensional real vector space in what concerns topology and continuity properties of functions, and that differentiability structure of complex variable functions is a much more rich than for real variable functions.
- Understand the geometric notion of homotopy between curves. Calculate line integrals of complex variable functions and understand their fundamental properties: Cauchy's Theorem and the main theorems of complex analysis that come as its consequences.
- Know Taylor and Laurent series and understand their applications.
- Understand the geometric notion of conformal mappings.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1.Revisões sobre aritmética de números complexos.Noções topológicas nos complexos. Sucessões e séries de números complexos.
- 2.Limites e continuidade.Definição das funções elementares.Noção de derivada. Funções holomorfas.Diferenciação das funções elementares. Funções harmónicas.
- 3. Homotopias entre curvas. Integração de funções de variável complexa. Invariância do integral por homotopias. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. Teorema de Morera, teorema de Liouville, teorema do máximo do módulo e teorema fundamental da Álgebra.
- 4. Convergência pontual e uniforme de sucessões e séries de funções. Séries de potências. Funções analíticas. Teorema de Taylor. Equivalência entre funções holomorfas e analíticas. Singularidades isoladas. Séries de Laurent. Classificação de singularidades isoladas.
- 5.Métodos de cálculo de resíduos. Teorema dos resíduos. Aplicação ao cálculo de integrais (reais e complexos). 6. Aplicações conformes. Compactificação dos complexos por um ponto. Transformações de Möbius.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Algebra of complex numbers. Topological notions on the complex field. Complex sequences and series.
- 2. Limits and continuity. Definition of the elementary complex functions. Notion of derivative. Holomorphic functions. Differentiability of the elementary functions. Harmonic functions.
- 3. Homotopy between curves. Complex integration. Cauchy's Theorem. Invariance of the integral by homotopy. Cauchy's Integral Formula. Morera's theorem, Liouville's theorem, maximum modulus principle, Fundamental Theorem of Algebra.
- 4. Pointwise and uniform convergence of function sequences and series. Power series. Analytic functions. Taylor's Theorem. Equivalence between holomorphic and analytic functions. analyticity. Isolated singularities. Laurent series. Classification of isolated singularities.
- 5. Residues. Calculation of residues. Residue theorem. Evaluation of definite integrals.
- 6. Conformal mappings. Compactification of the complex field by a point. Möbius transformations.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Numa primeira fase, são revistos os conceitos básico sobre aritmética de complexos, permitindo aos alunos ganhar aptidão e competência a manipular os números complexos. De seguida é introduzida a estrutura diferencial dos complexos, juntamente com a noção de função holomorfa, dando enfâse ao facto que esta estrutura é mais rica que a do plano. A próxima secção é dedicada à integração complexa, sendo apresentados os teoremas clássico na sua versão homotópica de forma a permitir uma melhor compreensão das questões geométricas associadas a esta secção. Na secção dedicada a séries, é introduzido o conceito de função analítica, dando enfâse que, ao contrário da estrutura diferencial no plano, esta é equivalente ao conceito de função holomorfa. Várias demonstrações são feitas recorrendo a integração permitindo que estas sejam mais simples e elegantes.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

In the first section, the basic concepts on complex arithmetic are reviewed, allowing students to gain aptitude and competence to manipulate complex numbers. Then the differential structure of the complexes is introduced, together with the notion of holomorphic function, emphasizing the fact that this structure is richer than that of the plane. The next section is devoted to complex integration, and the classical theorems are presented in their homotopic version to allow a better understanding of the geometric issues associated with this section. In the section devoted to series, the concept of analytic function is introduced, emphasizing that, unlike the differential structure in the plane, it is equivalent to the concept of holomorphic function. Several demonstrations are made using integration allowing them to be simpler and more elegant.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas, a teoria é exposta e são apresentados exemplos de aplicação e ilustração. Vários resultados apresentados são demonstrados. É dada oportunidade aos alunos de trabalhar na resolução de problemas constantes de uma lista previamente disponibilizada, com o apoio do professor caso o necessitem. Os resultados relevantes ilustrados pelos exercícios são objeto de comentário do professor.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The theory is explained and illustrated with examples. Main results are proved. The students are given the opportunity of working in a list of problems, with the instructor's support if needed, and the instructor's comments on relevant results highlighted in the problems.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de modelação de problemas e seleção da metodologia mais adequada para a respetiva resolução.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades.

O aluno deve assistir a, pelo menos, dois terços das aulas para obter frequência.

### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modelling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties.

The student must attend to, at least, two thirds of all classes.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. - Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science - 3rd Edition, Pearson Education, 2003.

J. E. Marsden and M. J. Hoffman, Basic Complex Analysis - Third Edition, Freeman (1999).

L. V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill (1979).

Elias M. Stein and Rami Shakarchi, Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis (2003),

N. H. Asmar and L. Grafakos, Complex Analysis with Applications, Springer (2018).

## Anexo II - Análise e Otimização Numérica

### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Análise e Otimização Numérica

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Numerical Analysis and Optimization

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Nuno Filipe Marcelino Martins - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitem (i) resolver numericamente sistemas lineares mal condicionados (ii) aproximar derivadas de primeira ordem e ordem superior (iii) aproximar a solução de problemas de valor inicial e (iv) resolver numericamente alguns problemas de otimização não linear sem restrições.

Além disso, o estudante deverá ser capaz de implementar, usando uma linguagem computacional, os métodos numéricos abordados e interpretar os resultados numéricos obtidos.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to approximate the solution of ill-conditioned linear systems (ii) to approximate the first and higher order derivatives of a function (iii) to approximate the solution of initial value problems and (iv) to numerically solve some unconstrained nonlinear

optimization problems.

Furthermore, the student should be able to implement, using a computational language, the algorithms related with the covered numerical methods and analyze the numerical results obtained.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Complementos de Álgebra Linear Numérica resolução numérica de sistemas lineares mal condicionados: métodos de decomposição em valores singulares, método de regularização de Tikhonov.
- 2. Diferenciação Numérica: derivadas de primeira ordem (diferenças progressivas, regressivas e centradas), derivadas de ordem superior. Extrapolação de Richardson.
- 3. Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias: métodos de passo simples, métodos de passo múltiplo explícitos e implícitos, métodos preditores - corretores.
- 4. Métodos de Optimização Não Linear Sem Restrições: condições de optimalidade, métodos de procura unidirecional (método de descida máxima, método de Newton, métodos de quasi-Newton), método dos gradientes conjugados lineares.

## 9.4.5. Syllabus:

- 1. Complements of Numerical Linear Algebra numerical solution of ill-conditioned linear systems: singular value decomposition methods, Tikhonov regularization method.
- 2. Numerical Differentiation: derivatives of first order (forward, backward and central difference formulas), higher order derivatives. Richardson's extrapolation.
- 3. Initial Value Problems for ODEs: one-step methods, explicit and implicit multistep methods, predictor-corrector methods.
- 4. Unconstrained Nonlinear Optimization methods: optimality conditions, line-search methods (steepest descent, Newton's method, quasi-Newton's methods), linear conjugate gradient method.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Em qualquer um dos tópicos do programa serão lecionados os conceitos, deduzidos os métodos numéricos bem como implementados e aplicados a exemplos concretos. Os pontos 1-4 do programa cumprem os objetivos (i)-(iv), respetivamente.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

In either topic of the syllabus, the concepts will be taught, the numerical methods will be deduced as well as implemented and applied to concrete examples. Bullets 1-4 of the syllabus allow to achieve the outcomes (i)-(iv), respectively.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias, devidamente complementada com exemplos, resoluções de problemas e implementação em computador dos métodos estudados. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes e dois trabalhos computacionais. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, examples, complemented with problem solving and implementation of the numerical methods studied. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests and two computational projects. If a student does not obtain approval through continuous evaluation, he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação dos conceitos e métodos numéricos, apoiada com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados e desenvolver a sua capacidade de aplicar, de forma adequada, os métodos estudados. A componente de implementação computacional permite a resolução de problemas mais desafiantes, com a consequente interpretação crítica dos resultados obtidos.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and numerical methods are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study and developing student's ability to properly apply the studied methods. The component related with the numerical implementation allows to address more challenging problems, with the consequent critic interpretation of the results obtained.

Students can test these skills in classes, under the supervision of a professor, or by themselves, scheduling individual

appointments with professors, in case of difficulties.

The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. R. Burden, D. Faires, Numerical Analysis, 9th edition, Brooks-Cole Publishing, 2011.
- 2. I. Griva, S. G. Nash, A. Sofer, Linear and Nonlinear Optimization, second edition, SIAM, 2009.
- 3. R. Kress, Numerical Analysis, Graduate Texts in Mathematics 181, Springer, 1998.
- 4. J. Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization, second edition, Springer, 2006.

#### Anexo II - Equações Diferenciais

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Equações Diferenciais

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

**Differential Equations** 

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

6

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Luís Trabucho de Campos - TP:56

### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam conhecer as principais técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias e com derivadas parciais e compreender a análise matemática subjacente.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this curricular unit the student will have acquired knowledge and skills that will enable him to know the main techniques in ordinary and partial differential equations and to understand the underlying mathematical analysis.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Existência e unicidade de solução. Factor Integrante. Interpretação geométrica. Aplicações.
- Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e superior. Existência e unicidade de solução. Solução geral da equação homogénea. Métodos de resolução de equações não homogéneas. Aplicações.
- 3. Sistemas de equações diferenciais. Existência e unicidade. Sistemas lineares com coeficientes constantes. Matriz Fundamental. Aplicações.
- 4. Introdução à Teoria de Sturm-Liouville. Exemplos.
- 5. Introdução às Séries de Fourier. Exemplos.
- 6. Equações diferenciais com derivadas parciais. Exemplos. Características.

- 7. Equação de propagação das ondas. Equação de difusão do calor. Equação de Laplace. Método de separação de variáveis. Exemplos.
- 8. Introdução ao Cálculo das Variações. Os problemas clássicos do Cálculo das Variações. Equações de Euler-Lagrange. Princípio de Hamilton.

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. First order ordinary differential equations. Existence and uniqueness of solution. Integrating Factor. Geometric interpretation. Applications.
- 2. Second and higher order linear ordinary differential equations. Existence and uniqueness of solution. General solution of the homogeneous equation. Methods to solve nonhomogeneous equations. Applications.
- 3. Systems of differential equations. Existence and uniqueness. Linear systems with constant coefficients. Fundamental Matrices. Applications.
- 4. Introduction to the Sturm-Liouville theory. Examples.
- 5. Introduction to Fourier Series. Examples.
- 6. Partial differential equations. Examples. Characteristics.
- 7. Wave equation. Heat equation. Laplace equation. Separation of variables. Examples.
- 8. Introduction to the Calculus of Variations. Classical problems in the Calculus of Variations. Euler-Lagrange Equations. Hamilton Principle.
- 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Este é um programa fundamental de equações diferenciais.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

This is a fundamental program of differential equations.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Aulas participadas, com exposição oral dos conceitos e ideias, complementada com exemplos. Os alunos vão ter uma participação ativa durante e fora da aula, resolvendo problemas que ajudam a consolidar as matérias. Haverá sessões individuais de esclarecimento de dúvidas. A avaliação será contínua, baseada em testes e na avaliação do trabalho do aluno ao longo do semestre, com um exame de recurso no final do semestre.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Participated classes, with oral presentation of concepts and ideas, complemented with examples. Students will be actively involved during and out of class, solving problems that helps in the consolidation of subjects. There will be individual tutorial sessions. The evaluation will be continuous, based on tests and on the student's work assessment throughout the semester, with an end-of-semester exam.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

As aulas expositivas, apoiada com exemplos ilustrativos, são a forma mais eficaz de introduzir o aluno nos temas de equações diferenciais. Posteriormente o aluno é obrigado a uma atitude ativa de consolidação de conhecimentos, tendo o acompanhamento constante do professor durante as aulas e nas sessões individuais de esclarecimento de dúvidas. A avaliação da unidade curricular é suficientemente diversificada e abrangente para testar a compreensão das ideias apresentadas.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

Lectures, supported by illustrative examples, are the most effective way to introduce the student to the subject of differential equations. Afterwards the student is guided to an active posture of knowledge consolidation, having the constant accompaniment of the teacher during the classes and in the individual sessions. The evaluation of the curricular unit is diverse and comprehensive enough to test the comprehension of the presented ideas.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

G. Birkhoff, Gian-Carlo Rota, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer Verlag, 1992.

W. E. Boyce, R. Diprima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley and Sons, Inc.,

E. Kreysig, Advanced engineering mathematics, John Wiley & Sons, 2006.

M.J. Forray, Variational Calculus in Science and Engineering, McGraw-Hill, 1968.

## Anexo II - Otimização Linear

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Otimização Linear

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

**Linear Optimization** 

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

6

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitem (i) modelar; e (ii) resolver e analisar as soluções de problemas de programação linear e linear inteira.

### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him (i) to model; and (ii) to solve and assess the obtained solutions of linear and integer linear programming problems.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Programação linear (PL): formulação de problemas em PL, geometria da PL, método do simplex, dualidade, análise de sensibilidade.
- 2. Programação linear inteira (PI): formulação de problemas em PI, PL vs PI, complexidade computacional, relaxações, método do branch and bound, métodos heurísticos.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Linear programming (LP): problem formulation, LP geometry, the simplex algorithm, duality.
- 2. Integer linear programming (IP): problem formulation, LP vs IP, computational complexity, relaxations, the branch and bound method, heuristics.

### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Em qualquer um dos tópicos serão apresentados exemplos ilustrativos dos problemas pertencentes à respetiva subárea da otimização (PL, PI), de forma a desenvolver a capacidade do aluno para modelar problemas reais que se enquadrem em cada um daqueles tipos, o que permite cumprir o objetivo (i).

Para cada classe de problemas serão estudadas as suas características principais, bem como algoritmos adequados à respetiva resolução, assim cumprindo o objetivo (ii).

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Examples of problems belonging to each one of the optimization subareas (LP, IP) will be provided, which will enhance student' skills for modeling real problems that fit in any of these optimization areas. This will permit to achieve outcome (i) above.

The main characteristics of each problem class, as well as algorithms for the corresponding solution, will be assessed. This fulfills the learning outcome (ii).

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso

das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it in an additional assessment.

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de modelação de problemas e seleção da metodologia mais adequada para a respetiva resolução.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modeling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

## 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

A First Course in Linear Optimization, Jon Lee, Reex Press, third edition, 2013-2018 https://github.com/jon77lee/JLee LinearOptimizationBook/blob/master/JLee.3.12.pdf

L.A. Wolsey, Integer Programming, Wiley, 1998.

Wayne L. Winston, Operations Research: Applications and Algorithms, Brooks/Cole; 4th edition, 2004.

# Anexo II - Álgebra Computacional

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Álgebra Computacional

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Computational Algebra

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

João Jorge Ribeiro Soares Gonçalves de Araújo - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências em computação simbólica e demonstração automática de teoremas.

Pretende-se que seja possível aos alunos:

- compreender os principais algoritmos da álgebra computacional;
- conhecer alguns algoritmos dos demonstradores automáticos de teoremas;
- conhecer algumas ferramentas para a matemática experimental e seu uso na modelagem e descoberta de resultados matemáticos.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge, skills and competences in symbolic computation and automated theorem proving.

It is intended that students be able to:

- understand the main algorithms of computational algebra;
- know some algorithms of automated theorem provers;
- know some tools for experimental mathematics and its use in modeling and discovery of mathematical results.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Generalidades sobre semigrupos, relações de Green e a estrutura das classes-D e o Teorema de Rees. Semigrupos de transformações e grupos de permutações.
- 2. Tratamento de grupos de permutações, semigrupos de transformações, matrizes e espaços vetoriais por programação em computação simbólica.
- 3. O Teorema de Birkhoff para variedades de semigrupos.
- 4. Demonstração automática de teoremas: "The given clause algorithm", ordenação de termos, exploração de conjeturas (provas e contra-exemplos) em variedades de semigrupos, grupos, anéis e quase-grupos. "Proof
- 5. Explorar artigos recentes de álgebra tentando provar novos teoremas (recíprocos, generalizações, análogos em outras variedades, etc.).

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Generalities about semigroups, Green's relations and the D-class structure, and Rees's theorem. Transformation semigroups and permutation groups.
- 2. Treatment of permutation groups, transformation semigroups, matrices and vector spaces by programming in symbolic computation.
- 3. Birkhoff's theorem for semigroup varieties.
- 4. Automated theorems provers: The given clause algorithm, ordering of terms, exploration of conjectures (proofs and counterexamples) in varieties of semigroups, groups, rings and quasi-groups. Proof sketches.
- 5. Explore recent algebra articles trying to prove new theorems (reciprocal, generalizations, analogs in other varieties, etc.).

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Em qualquer um dos tópicos serão apresentados os teoremas elementares da área bem como as respetivas demonstrações. Para cada teorema vamos tentar dar a prova mais elegante e transparente de forma a que os alunos, mais do que conhecerem enunciados de teoremas, se apropriem de técnicas utilizáveis em outros contextos e situações.

A parte computacional será essencialmente hands on com sessões em laboratório de computação.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The theorems of each area will be presented with appropriate proofs. For the main theorems we will try to provide the proofs that grant the deepest insight in order to equip students with tools that can be used in different areas, contexts and situations.

The computational part will essentially be hands-on with computer lab sessions.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas bem como sessões hands on. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

A avaliação contínua é baseada em dois testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor. Continuous assessment is based on two tests. If a student does not obtain approval through continuous assessment he can try it in an additional assessment.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de pensar em questões de álgebra abstrata com recurso a computadores.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modeling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- J. M. Howie, Fundamentals of semigroup theory, London Mathematical Society, 1996.
- J. Dixon and B. Mortimer, Permutation groups, Springer, 1996.
- O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, Classical Finite Transformation Semigroups, Springer, 2009.
- GAP tutorial. https://www.gap-system.org/Manuals/doc/tut/chap0.html http://proverx.com/login.php

#### Anexo II - Estatística Atuarial

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Estatística Atuarial

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

**Actuarial Statistics** 

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

6

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

## 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Rui Manuel Rodrigues Cardoso - TP:28

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Dora Susana Raposo Prata Gomes - TP:28

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Ser capaz de criar distribuições através de operações fundamentais
- Conhecer as principais distribuições e suas relações usadas nas perdas de uma seguradora
- Analisar a cauda de uma distribuição e saber classificá-la
- Ser capaz de perceber os conceitos básicos da teoria de extremos aplicada ao atuariado
- Saber utilizar técnicas estatísticas em dados típicos para o número e montante de indemnizações

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired the knowledge, skills and competences that will allow him:

- To be able to create distributions through core operations
- To know the main distributions and their relationships used for the insurer's claims
- To analyze the tail of a distribution and know how to classify it
- To be able to understand the basic concepts of extreme theory applied to actuarial sciences
- To know how to use statistical techniques for typical data concerning the number and amount of claims

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Soma de variáveis aleatórias independentes
- 1.1 Alguns resultados
- 1.2 Convoluções
- 2 Criação de novas distribuições
- 2.1 Multiplicação por constante
- 2.2 Potenciação
- 2.3 Mistura de distribuições
- 2.4 Splicing
- 3 Famílias de distribuições
- 3.1 Famílias paramétricas
- 3.2 Distribuições limite
- 3.3 Relacionamento entre distribuições
- 3.4 A família exponencial
- 4 Caudas de distribuições
- 4.1 Classificação
- 4.2 Distribuição de equilíbrio
- 4.3 Comportamento da cauda
- 5 Distribuições de valores extremos
- 5.1 Distribuição do máximo
- 5.2 O domínio máximo de atração
- 5.3 Distribuição de Pareto Generalizada
- 5.4 Distribuições limite dos excessos
- 6 Estimação
- 6.1 Estimador Kaplan-Meier
- 6.2 Estimador Nelson-Aalen
- 6.3 Modelos de densidade Kernel
- 6.4 Estimação para dados completos
- 6.5 Estimação para dados modificados
- 6.6 Estimação para dados truncados

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1 Sum of independent random variables
- 1.1 Some results
- 1.2 Convolutions
- 2 Creating new distributions
- 2.1 Multiplication by a constant
- 2.2 Raising to a power and exponentiation
- 2.3 Mixing
- 2.4 Splicing
- 3 Distribution families
- 3.1 Parametric families
- 3.2 Limiting distributions
- 3.3 Relationships between distributions
- 3.4 Exponential family
- 4 Tails of distributions
- 4.1 Classification
- 4.2 Equilibrium distribution
- 4.3 Tail behavior
- 5 Extreme value distributions
- 5.1 Distribution of the maximum
- 5.2 Maximum domain of attraction

- 5.3 Generalized Pareto distribution
- 5.4 Limiting distributions of excesses
- 6 Estimation
- 6.1 Kaplan-Meier estimator
- 6.2 Nelson-Aalen estimator
- 6.3 Kernel density models
- 6.4 Estimation to complete data
- 6.5 Estimation to modified data
- 6.6 Estimation to truncated data

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

São estudadas funções de distribuição, habitualmente utilizadas em atuariado no que diz respeito às perdas em que uma seguradora incorre, ao nível do comportamento da cauda, da criação de novas distribuições e das suas características gerais que permitem estabelecer o relacionamento existente entre elas. Este estudo é complementado com noções básicas da teoria de valores extremos com aplicação em atuariado. O propósito dos pontos anteriores é a sua utilização na análise de dados, que as seguradoras dispõem, para a estimação de parâmetros e poder prever as perdas associadas a vários tipos de seguros.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Several distribution functions are studied, usually used in actuarial context concerning the losses in which an insurer incurs, in terms of tail behavior, the creation of new distributions and their general characteristics that allow to stablish relationships between them. This study is complemented with basic notions of the theory of extreme values with application in actuarial sciences. The purpose of the previous points is its use in the data analysis, which insurers have, in order to estimate parameters and to be able to predict the losses associated with various types of insurance products.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas teórico-práticas explicar-se-ão e discutir-se-ão os sucessivos tópicos do programa da Unidade Curricular. Os temas são introduzidos pelo docente, consolidados recorrendo sempre que possível a exemplos reais retirados da indústria seguradora, seguindo-se uma breve discussão e utilização de meios computacionais de apoio à resolução de

A avaliação consiste em três componentes, de acordo com as regras da FCT NOVA: dois testes que versam os conhecimentos teóricos e um trabalho prático. A classificação final é a média aritmética das notas de cada uma das componentes, ou no caso de não aprovação na época normal será a nota no exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

In the theoretical and practical lectures, it will be explained and discussed the successive topics of the course program. The topics are introduced by the teacher, consolidated using as much as possible with real examples drawn from the insurance industry, followed by a brief discussion and use of computational means to support problem solving.

The evaluation consists of three components, according to the FCT NOVA rules: two midterm tests concerning the theoretical knowledge and an assignment. The final classification is the average of the grades in each component, or in the case of fail, it will be the grade of the final exam.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição da matéria em aulas teórico-práticas permite ao aluno a compreensão de conceitos de estatística habitualmente aplicados na atividade seguradora, bem como a utilização prática dos conceitos adquiridos. A aplicação dos conceitos teóricos na resolução de exercícios, permite aos alunos desenvolverem capacidades de conceptualização e resolução de problemas complexos, culminando no domínio da matéria em estudo e preparandoos para a resolução de problemas práticos na sua futura atividade profissional.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The presentation of the subjects in the lectures allows the student to understand the concepts of statistics usually applied in the insurance activity, as well as the practical use of the concepts acquired. The application of the theoretical concepts in the resolution of exercises, allows students to develop capacities to conceptualize and solve complex problems, resulting in expertise on the studied subjects and abilities to solve practical problems in future professional activity.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- Bowers, Newton, Gerber, Hickman, Jones and Nesbitt. (1997) Actuarial Mathematics (second edition). Itasca, Illinois: The Society of Actuaries.
- Dickson, D.C.M., Hardy, M.R. and Waters, H.R.. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Cambridge University Press, 2013.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. & Denuit, M. (2008) Modern Actuarial Risk Theory using R (second edition),
- Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2012) Loss Models: From Data To Decisions (fourth edition), Wiley.

#### Anexo II - História da Matemática

### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

História da Matemática

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

History of Mathematics

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

84

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:28

#### 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Reinhard Kahle - TP:28

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta UC os alunos deverão ter adquirido uma idea geral da História da Matemática, como ela moldou os conceitos, ferramentas e metodologias da Matemática moderna.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the students should have a general idea of the History of Mathematics, as it shaped the concepts, tools, and methodologies of modern Mathematics.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Matemática grega
- 2. Álgebra e Geometria Analítica
- 3. Newton e Leibniz
- 4. Geometrias não-euclideanas
- 5. Matemática moderna

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Greek Mathematics
- 2. Algebra and Analytic Geometry
- 3. Newton and Leibniz
- 4. Non-euclidean Geometries
- 5. Modern Mathematics

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático da UC é estruturado de forma a que, por um lado, os tópicos apresentados sejam devidamente encadeados e, por outro lado, que permitam atingir os objectivos da UC.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The programmatic content of the lecture course is structured in such a way that, on the one hand, the topics presented are properly linked and, on the other hand, that they can achieve the objectives of the lecture course.

### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Métodos habituais de ensino universitário da Matemática com uma forte componente de participação activa do aluno (seminário).

Seminário + Relatório + Prova oral (opcional): 100%

### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Usual university-style Math teaching with an active participation of the student (seminar). Seminar + Report + Oral examination (optional): 100%

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

As componentes teóricas necessárias para atingir os objetivos de aprendizagem são ministrados nas aulas e discutidas com os alunos.

#### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The necessary theoretical components to reach the objectives of the learning are given in the classes and discussed with the students.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

D. J. Struik, A concise history of mathematics, fourth revised edition (Dover Publications, New York, 1987).

História da Matemática, Universidade Aberta, de Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva e Maria José Costa.

# Anexo II - Introdução à Teoria dos Grafos

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Introdução à Teoria dos Grafos

# 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Introduction to Graph Theory

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Maria Cecília Perdigão Dias da Silva - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam identificar e contextualizar problemas de diversas áreas utilizando grafos.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of the curricular unit student should have acquired knowledge, skills and competences that allow him to identify and contextualize problems in various areas using graphs

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Generalidades.
- 2. Conexidade e caminho mais curto.
- 3. Árvores e Arborescências.
- 4 Grafos Fulerianos
- 5. Grafos Hamiltonianos.
- 6. Matrizes e Grafos.
- 7. Grafos planares.
- 8. Coloração.
- 9. Fluxos em redes.
- 10. Emparelhamentos, coberturas, independentes, cliques e k-clubes.
- 11. Centralidade e modularidade.
- 11. Grafos aleatórios.

## 9.4.5. Syllabus:

- 1. Basics.
- 2. Connectivity and shortest paths.
- 3. Trees and arborescence.
- 4. Eulerian graphs.
- 5. Hamiltonian graphs.
- 6. Matrices and Graphs.
- 7. Planar graphs.
- 8. Colouring.
- 9. Flows.
- 10. Matchings, covers, independent sets, cliques and k-clubs.
- 11. Random graphs.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

No capítulo 1 são introduzidos os conceitos e resultados básicos da Teoria de Grafos. Alguns temas como conexidade, árvores e arborescências, grafos eulerianos e hamiltonianos, grafos planares, matrizes e coloração e estruturas em grafos são abordados nos capítulos seguintes. Ao longo dos vários capítulos são apresentados vários algoritmos e resultados fundamentais.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

In Chapter 1 basic concepts and results of Graph Theory are introduced. In the other chapters subjects like connectivity, trees and arborescence, eulerian and hamiltonian graphs matrices, planar graphs and colouring are presented. Some algorithms and fundamental results are presented along all the course.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas são lecionados os conceitos e os resultados fundamentais que, na sua maioria, são demonstrados. Ao longo da aula são apresentados exemplos ilustrativos e são propostos exercícios que os alunos deverão resolver autonomamente de forma a consolidar a matéria teórica lecionada.

Para além disto os alunos têm a possibilidade de resolver exercícios e de propor exercícios para resolução de forma a esclarecer as dúvidas surgidas durante o tempo dedicado ao estudo autónomo da matéria.

No horário de atendimento docente cada aluno pode, individualmente, esclarecer as suas dúvidas com qualquer um dos docentes da disciplina.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes consist on an explanation of the theory which is illustrated by examples. Most results are proven. We have a practical component in which some exercises are solved, the remaining are left to the students as part of their learning process.

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

As componentes teóricas determinadas nos objetivos da unidade curricular são lecionadas nas aulas onde também se apresentam exercícios práticos para ilustrar conceitos e resultados. A aprendizagem é consolidada com a resolução de exercícios, o estudo autónomo do aluno e, se necessário, utilizando o horário de atendimento dos docentes. A avaliação de conhecimentos é efetuada através de provas escritas (testes/exames).

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The main concepts specified in the objectives of the course are explained in the lectures in which some practical problems are also presented as an illustration of concepts or results. Learning is consolidated whith practical exercises, the student"s self-study and, if necessary, using the office hours of teachers. The frequency in the course aims to ensure that students follow the matter. The assessment is made through written tests (tests / exams).

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1 I. Cabral., Grafos e Aplicações, Texto Teórico e Exercícios, Departamento de Matemática, Universidade Nova de Lisboa, 1997,1998.
- 2 D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.
- 3 M. Newman. Networks: An Introduction, Oxford University Press, 2010
- 4 J. Gross, J. Yellen, Handbook of Graph Theory, CRC Press, 2004.
- 5 N. Hartsfield, G. Ringel, Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, revised and augmented, Academic Press, Boston, 2003.

## Anexo II - Investigação Operacional

#### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Investigação Operacional

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

**Operations Research** 

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

М

# 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Nelson Fernando Chibeles Pereira Martins - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá desenvolvido competências que lhe permitam:

- 1. identificar e resolver problemas básicos de Gestão de Stocks;
- 2. identificar e resolver problemas básicos de Gestão de Projectos;
- 3. Identificar e resolver alguns problemas clássicos de otimização em Redes;
- 4. identificar e resolver problemas básicos de Teoria da Decisão;

- 5. analisar uma Cadeia de Markov em tempo discreto;
- 6. gerar números pseudo-aleatórios e aplicá-los em problemas básicos de Simulação.

### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course a student should be able to:

- 1. identify and solve basic Inventory Control problems;
- 2. identify and solve basic Project Management problems;
- 3. Identify and solve some classical Network Optimization problems
- 4. identify and solve basic Decision Making problems;
- 5. analyze a Markov Chain in discrete time;
- 6. generate pseudo-random numbers and use them in basic Simulation problems.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Gestão de Projectos (Método do Caminho Crítico; Diagrama de Gantt / Gestão de recursos; Redução da duração total de um projecto; Técnica PERT)
- 2 Gestão de Stocks (modelos determinísticos básicos; extensões dos modelos determinísticos básicos).
- 3 Otimização em Redes (Introdução à Teoria de Grafos. Caminho mais curto; Algoritmo de Dijsktra; Algoritmo de Floyd-Warshall; Árvore Geradora de Custo Mínimo; Algoritmo de Prim. Algoritmo de Kruskal. Grafos Eulerianos. Problema do Carteiro Chinês. Problema do Caixeiro Viajante.
- 4 Teoria da Decisão (Decisão em situações de incerteza e de risco; Utilidade. Introdução à decisão multicritério; Decisões sequenciais).
- 5 Cadeias de Markov em Tempo Discreto (Definição; Probabilidades de transição; Decomposição de uma cadeia homogénea; Teoremas Limite).
- 6 Simulação (Geração de números pseudo-aleatórios; Aplicações).

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1 Project Management (Critical Path Method; Gantt Diagram; Reducing the duration of a project; PERT technique).
- 2 Inventory Control (basic deterministic models; extensions of the basic deterministic models).
- 3 Networks Optimization. (Introduction to Graph Theory. Shortest Path Problem. Dijsktra Algorithm. Floyd-Warshall Algorithm. Minimal Spanning Tree. Prim Algorithm. Kruskal Algorithm. Eulerian Graphs. Chinese Postman Problem. Hamiltonian Graphs. Traveling Salesman Problem.
- 4 Decision Making (Decision under uncertainty and risk; Utility. Introduction to multicriteria decision making; Sequential decisions).
- 5 Markov Chains in Discrete Time (Definition; Transition probabilities; Decomposition of a homogeneous chain; Limit theorems).
- 6 Simulation (Generating of pseudo-random numbers; Applications).

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular Em qualquer um dos tópicos serão apresentados exemplos ilustrativos dos problemas pertencentes à respetiva temática de forma a desenvolver a capacidade do aluno para identificar e resolver problemas reais que se enquadrem em cada um daqueles tipos, o que permite cumprir os objetivos acima indicados.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Examples of problems belonging to each one of themes will be provided, which will enhance student' skills for modeling real problems that fit in any of these optimization areas. This will permit to achieve the outcomes mentioned above.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas teórico-práticas decorrem em laboratório computacional e permitem a apresentação dos conteúdos programáticos e a sua imediata aplicação, quando necessário utilizando meios informáticos. Os alunos dispõem de elementos teóricos de apoio às aulas, bem como de enunciados de exercícios. Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas, nas sessões semanais destinadas ao atendimento aos alunos ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor. Existe uma avaliação regular de conteúdos durante o semestre. Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois testes, três atividades de participação e um projeto de grupo. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso, que substituirá apenas a componente dos dois testes.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes take place in a computational lab, allowing students to acquire and immediately apply knowledge, using specific software when required. Theoretical notes and a set of exercises are provided to students. Any questions or doubts will be addressed during the classes, during the weekly sessions specially programmed to attend students or in individual sessions previously scheduled between professor and students. During semester, students are regularly evaluated. Students need to attend to a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two tests, three classroom activities and a group project. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it through a final exam that replaces the tests evaluation component.

9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

De modo a motivar e consolidar a aprendizagem, as aulas são lecionadas em regime teórico-prático. A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de análise de problemas e seleção da metodologia mais adequada para a respetiva resolução. Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. O processo de avaliação exige um contacto regular com a matéria ao longo do semestre e incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

To motivate and consolidate learning, classes are lectured in a theoretical-practical approach. In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for analyzing problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution. Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. "Elementos de apoio às aulas de Introdução à Investigação Operacional", "Enunciados de Exercícios de Introdução à Investigação Operacional", Ruy A. Costa (2007)
- 2. Investigação Operacional, Valadares Tavares et al, McGraw Hill (1997)
- 3 Wayne L. Winston, Operations Research: Applications and Algorithms, Brooks/Cole; 4th edition, 2004.
- 4. Introduction to Operations Research, Hillier e Lieberman, McGraw Hill (1995)
- 5. Operations Research An Introduction, Taha, Prentice Hall (2011)

# Anexo II - Medida, Integração e Probabilidades

#### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Medida, Integração e Probabilidades

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Measure, Integration and Probability

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

# 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

## 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Maria Fernanda de Almeida Cipriano Salvador Marques - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular é esperado que os estudantes consigam:

- aplicar as propriedades do integral de Lebesgue (relacionar com o integral de Riemann),

- usar a aproximação de funções mensuráveis através de funções simples para provar certas propriedades dos integrais,
- aplicar os teoremas da convergência monótona e de Lebesgue,
- aplicar a desigualdade de Holder,
- usar a fórmula de mudança variáveis. Manipular integrais de variáveis aleatória independentes,
- usar as propriedades dos espaços L^p,
- calcular a esperança condicionada de certas v.a.,
- calcular o integral de uma função de várias variáveis relativamente à medida produto, usando o teorema de Fubini,
- saber aplicar a lei dos grandes números e o teorema do limite central.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course students are expected to be able to:

- apply the properties of the Lebesgue integral (relate with the Riemann integral),
- use the approximation of measurable functions through simple functions to prove certain properties of integrals,
- apply monotonous convergence theorem and Lebesgue convergence theorem
- apply Holder's inequality,
- use change of variables 's formula to compute integrals of random variables. Manipulate integrals of independent r.v.
- use the properties of L ^ p spaces,
- determine the conditional expectation of certain r.v.,
- use Fubini's theorem,
- apply the law of large numbers and the central limit theorem.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1- Medida exterior de Lebesgue sobre R. Conjuntos mesuráveis à Lebesgue. Medida de Lebesgue sobre R. Espaço mensurável e espaço de medida. Espaço de medida
- completo. Sigma-álgebra de Borel.
- 2- Funções mensuráveis. Variáveis aleatórias (v.a.). Lei e independência de v.a..
- 3- Integral de Lebesgue.
- 4- Teoremas da convergência monótona e da convergência dominada de Lebesgue. Aproximação de funções mensuráveis.
- 5- Fórmula de mudança de variáveis. Esperança de v. a.. Medidas absolutamente contínuas. Caracterização das v. a. relativamente à sua lei (contínuas, discretas e outras).
- 6- Espaços L^2, ortogonalidade e projeções. Esperança condicionada de uma v. a. relativamente a uma sigma-álgebra. Espaços L^p. Desigualdades de Holder e de Minkowski. L^p como espaços completos.
- 7- Medida produto. Teorema de Fubini.
- 8- Teorema de Radon-Nykodim
- 9- Convergência em probabilidade. Lemas de Borel-Cantelli. Leis forte e fraca dos grandes números. Teorema do limite central.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1- Lebesgue outer measure on R. Lebesgue measurable sets. Lebesgue measure on R. Measurable space and measure space. Borel sigma-field. Complete measure spaces.
- 2- Measurable functions. Law and independence of r.v..
- 3- Lebesgue integral.
- 4. Monotonous convergence theorem and Lebesgue's convergence theorem. Approximation of measurable functions.
- 5- Change of variables. Conditional expectation. Characterization of a r.v. with respect to its law (continuous, discrete, and other type).
- 6- L^2 spaces, orthogonality and projections. Conditioned expectation. L^ p spaces. Holder and Minkowski's inequalities. L^ p as complete spaces.
- 7- Product measure. Fubini's theorem.
- 8- Radon-Nykodim Theorem
- 9- Convergence in probability. Borel-Cantelli's Lemma. Strong and weak laws of large numbers. Central limit theorem.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Para que todos os objetivos referidos sejam alcançados é necessário o conteúdo programático referido.

Por outro lado, as matérias contidas no conteúdo programático são suficientes para que o aluno cumpra todos os objetivos.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

For all these purposes to be achieved it is necessary the program content.

On the other hand, the materials contained in the syllabus are sufficient so that the student meets all objectives.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

A avaliação de conhecimentos é realizada através de Avaliação Contínua ou Exame Final.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

The evaluation is done through Continuous Evaluation or Final Exam.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Os métodos de ensino apresentados permitem aos alunos apreender todos os conteúdos programáticos. Visam uma profunda compreensão das noções teóricas e suas aplicações nomeadamente através da resolução de problemas. Assim, os estudantes ficam aptos para atingir todos os objetivos.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The teaching methods presented allow students to understand all the contents. The aim of these methods is to provide a deep understanding of theoretical concepts and their applications namely through clear expositions of the theoretical concepts and their application solving problem.

Thus, the students are able to achieve all objectives.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. Marek Capinski, Ekkehard Kopp. Measure, Integration and Probability. Springer- Verlag
- 2. Paul Malliavin: Integration and Probability. Springer-Verlag. 1995

#### Anexo II - Modelos Multivariados

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Modelos Multivariados

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Multivariate Models

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

## 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

6

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Filipe José Gonçalves Pereira Margues - TP:28

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Frederico Almeida Gião Gonçalves Caeiro - TP:28

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Adquirir conhecimentos elementares em Estatística Multivariada, nomeadamente sobre as distribuições multivariada Normal e Wishart, inferência sobre vetores de médias, regressão multivariada, análise canónica e introdução às

Utilizar adequadamente os conceitos e técnicas apreendidos, juntamente com o software R, na resolução dos mais

diversos problemas da vida real.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

Acquire basic knowledge in multivariate statistics, particularly about the multivariate Normal and Wishart distributions, inference about mean vectors, multivariate regression, canonical analysis and introduction to copulas.

Use the concepts and techniques properly apprehended, along with the R software, in solving most diverse problems of real life.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Breves revisões e noções básicas de Álgebra Linear
- 2 A distribuição Normal Multivariada. Estimadores de máxima verosimilhança e suas distribuições. A distribuição Wishart
- 3 Inferência sobre vetores de médias
- 3.1 Testes com base numa amostra
- 3.2 Testes com base em duas amostras, amostras emparelhadas e amostras independentes
- 3.3 Testes com base em várias amostras
- 4 Regressão Multivariada e Análise Canónica
- 5 Introdução a Copulas
- 5.1 Definição
- 5.2 Dependência, concordância, dependências inferior e superior de caudas
- 5.3 A copula Gaussiana
- 5.4 A família Archimedean de copulas

## 9.4.5. Syllabus:

- 1 Brief reviews and basics of Linear Algebra
- 2 The Multivariate Normal distribution. Maximum likelihood estimators and their distributions. The Wishart distribution
- 3 Inference on vectors of averages
- 3.1 Tests based on a sample
- 3.2 Tests based on two samples, paired samples and independent samples
- 3.3 Tests based on multiple samples
- 4 Multivariate Regression and Canonical Analysis
- 5 Introduction to Copulas
- 5.1 Definition
- 5.2 Dependence, Concordance, Upper and Lower tail dependencies
- 5.3 The Gaussian Copula
- 5.4 The Archimedean family of copulas

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático da Unidade Curricular fornece aos alunos uma visão alargada dos modelos multivariados mais usuais, fornecendo competências teóricas e práticas que lhes permitirão modelar diversos tipos de fenómenos.

Nos capítulos de 1 a 5 são explorados os seguintes temas: distribuições multivariadas Normal e Wishart, inferência sobre vetores de médias, regressão multivariada, análise canónica e introdução às cópulas.

Nos materiais de apoio serão disponibilizados slides de apoio a cada capítulo, exercícios com e sem resolução e ficheiros com dados que servem de base para a resolução de diversos problemas de natureza prática.

Durante as aulas serão fornecidas as indicações necessárias para a utilização do software R, no que se refere aos packages essenciais para a resolução dos problemas propostos.

Muitos dos exercícios são baseados em problemas da vida real.

Os objetivos enunciados são assim abrangidos.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The curricular content of the Course provides students with a broad view of the most common multivariate models, providing theoretical and practical skills that will allow them to model different types of phenomena.

In chapters 1 to 5 the following topics are explored: Normal and Wishart multivariate distributions, inference on vectors of means, multivariate regression, canonical analysis and introduction to copulas.

In the support materials will be available slides to support each chapter, exercises with and without resolution and data files that serve as the basis for solving various practical problems.

During the lessons, the necessary information will be provided for the use of the R software for the packages essential https://www.a3es.pt/si/iportal.php/process form/print?processId=da839ee9-d029-0f8a-5733-5da5e1a17c56&formId=aa7d7b1a-0913-9011-b4... 80/109

for solving the problems proposed.

Many of the exercises are based on real-life problems.

The stated objectives are thus covered.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

O objetivo principal da Unidade Curricular é dotar os alunos de ferramentas adequadas à modelação de problemas passíveis de serem estudados e modelados através de modelos multivariados.

Numa primeira fase, serão transmitidos os conteúdos essenciais de Estatística Multivariada, passando-se, numa segunda fase, à Inferência sobre vetores de médias baseados numa ou em mais amostras.

Serão abordados, de um ponto de vista teórico e prático, as temáticas da Regressão Multivariada, Análise Canónica e Introdução às cópulas.

Será efetuada uma articulação entre os resultados teóricos e algumas aplicações práticas a situações concretas e reais, sempre que possível.

As aulas decorrerão em regime de exposição de conteúdos, demonstração de resultados e resolução de pequenos exemplos. Será privilegiada a utilização de meios computacionais que permitam a resolução de problemas mais complexos.

A avaliação será efetuada através de avaliação escrita e trabalho prático computacional.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The main objective of the Curricular Unit is to provide the students with tools suitable for modeling problems that can be studied and modeled using multivariate models.

In a first phase, the essential contents of Multivariate Statistics will be transmitted, passing, in a second phase, to the Inference on vectors of averages based on one or more samples.

The topics of Multivariate Regression, Canonical Analysis and Introduction to Copulas will be approached from a theoretical and practical point of view.

There will be an articulation between theoretical results and some practical applications to concrete and real situations, whenever possible.

The lectures will be based on content exposition, demonstration of results and resolution of small examples. In the practical part will be preferred the use of computational means that allow the resolution of more complex problems. The evaluation will be done through written evaluation and practical computational work.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Pretende-se que os alunos adquiram competências teóricas e práticas que permitam entender e analisar os tipo de fenómenos modelados através de modelos multivariados. Pretende-se, ainda, que os alunos adquiram os conhecimentos necessários a um aprofundamento posterior do conhecimento nesta área.

Neste sentido, a exposição detalhada dos conteúdos teóricos e demonstração dos resultados principais dotarão os alunos das competências necessárias, não só à resolução de problemas práticos, mas também ao aprofundamento destas matérias, em situações futuras.

Por outro lado, a resolução computacional de problemas práticos fornece aos alunos capacidades importantes para resolução de problemas reais e concretos bem como de capacidades de análise critica aos resultados obtidos.

A resolução prática computacional fornece ainda aos alunos capacidades extra de programação na linguagem a utilizar.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

It is intended that students acquire theoretical and practical skills that allow them to understand and analyze the types of phenomena modeled through multivariate models. It is also intended that students acquire the necessary knowledge to further deepen knowledge in this area.

In this sense, the detailed presentation of theoretical contents and demonstration of the main results will give students the necessary skills, not only to solve practical problems, but also to deepen these subjects in future situations.

On the other hand, the computational resolution of practical problems provides students with important skills for solving real and concrete problems as well as analytical skills for the results obtained.

The practical computational resolution also provides students with extra programming skills in the language to use.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Johnson, R. and Wichern, D. W. (2007), Applied Multivariate Statistical Analysis, 6th Edition, Prentice Hall, New Jersey.

Flury, B. (1997), A First Course in Multivariate Statistics, Springer. New York

Morrison, D. F. (2004), Multivariate Statistical Methods, 4th Edition, Duxbury Press

Rencher, A. C. (1998), Multivariate Statistical Inference and Applications, John Wiley & Sons

Rencher, A. C. (2002), Methods of Multivariate Analysis, John Wiley & Sons

## Anexo II - Processos Estocásticos e Aplicações

#### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Processos Estocásticos e Aplicações

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Stochastic Processes and Applications

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

## 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

### 9.4.1.6. ECTS:

### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Manuel Leote Tavares Inglês Esquível - TP:28

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Gracinda Rita Diogo Guerreiro - TP:28

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Esta UC fundamenta o conhecimento na área dos fenómenos estocásticos. São estudados alguns exemplos fundamentais dos processos estocásticos em tempo discreto, suas propriedades e exemplos de aplicações. No final da UC o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam:

- Reconhecer e utilizar as principais propriedades de processos estocásticos em tempo discreto.
- Saber decidir face a uma situação real qual o melhor modelo de processo estocástico a utilizar.
- Identificar os fenómenos passíveis de modelação através de Processos de Poisson, utilizar as suas propriedades, dando especial relevo a aplicações reais.
- Identificar uma cadeia de Markov e utilizar as propriedades deste tipo de processos para análise de um modelo concreto. Efetuar aplicações a problemas reais.
- Identificar uma martingala e utilizar as propriedades deste tipo de processos no estudo do seu comportamento, em particular, na determinação do eventual comportamento assimptótico.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

This course intends to give appropriate knowledge foundations for the study of the evolution of random phenomena. At the end of this course, the student will obtain knowledge, skills and competences that allow him to:

- -Recognize and use the main properties of chosen examples of time discrete stochastic processes with special emphasis on applications;
- -To be able to decide which is the more appropriate model of a stochastic process to use when faced with a realistic

situation.

- -Identify the phenomena adequate to be modeled by Poisson Processes and make use of the properties, giving special emphasis to real applications.
- -To identify a Markov chain and use the characteristic properties of this type of processes for the analysis of a concrete model. Perform applications to real and concrete problems.
- o identify a martingale and use the characteristic properties of this type of processes in the study of its behavior, in particular, in the determination of a possible asymptotic behavior.

## 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Noções Gerais de Processos Estocásticos
- 1.1 Definições
- 1.2 Processos Estacionários e Processos Evolutivos
- 1.3 Processos de Incrementos Independentes e Estacionários
- 1.4 Processos de Poisson
- 1.5 Processos de Markov
- 2. Processos de Contagem
- 2.1 Definição
- 2.2 Axiomática do Processo de Poisson Homogéneo
- 2.3 Processos derivados do Processo de Poisson
- Processo de Poisson Não Homogéneo
- Processo de Poisson Generalizado
- Processo de Poisson Composto
- 2.4 Tempos entre Chegadas e Tempos de Espera
- 3. Cadeias de Markov a Tempo Discreto
- 3.1 Definicões
- 3.2 Probabilidades de Transição e Equação de Chapman-Kolmogorov
- 3.3 Classificação dos Estados e Decomposição da Cadeia
- 3.4 Tempos de Ocupação e 1ª Passagem
- 3.5 Distribuição Estacionária
- 3.6 Teoremas Limite
- 4. Martingalas a Tempo Discreto
- 4.1 Definições
- Filtração
- Martingala
- 4.2 Martingalas
- Martingala a Tempo Discreto
- Incrementos de Martingala
- Supermartingala e Submartingala
- 4.3 Tempo de Paragem
- 4.4 Convergência em Martingalas

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. General notions of Stochastic Processes
- 1.1 Definitions
- 1.2 Stationary Processes and Evolutionary Processes
- 1.3 Processes of Independent and Stationary Increments
- 1.4 Poisson processes
- 1.5 Markov Processes
- 2. Counting Processes
- 2.1 Definition
- 2.2 Axiomatic of the Homogeneous Poisson Process
- 2.3 Processes derived from the Poisson process
- Non Homogeneous Poisson Process
- Generalized Poisson Process
- Composite Poisson Process
- 2.4 Time Between Arrivals and Waiting Times
- 3. Discrete Time Markov Chains
- 3.1 Definitions
- 3.2 Transition Probabilities and Chapman-Kolmogorov Equation
- 3.3 Classification of States and Chain Decomposition
- 3.4 Time of Occupation and 1st Passage
- 3.5 Stationary Distribution
- 3.6 Limit Theorems
- 4. Discrete Time Martingales
- 4.1 Definitions
- Filtration
- Martingala
- 4.2 Martingales
- Discrete Time Martingales
- Increments of Martingala

- Supermartingale and Submartingale
- 4.3 Stopping Time
- 4.4 Convergence in Martingales

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático da Unidade Curricular fornece aos alunos uma visão integrada dos processos estocásticos mais usuais, fornecendo ainda competências e conhecimentos que os dotam de capacidade de adaptação e estudo de outros tipos de fenómenos.

Os processos estocásticos estudados em maior detalhe (pontos 2, 3 e 4 dos conteúdos programáticos) permitirão aos alunos a modelação de um vasto leque de fenómenos de aplicação prática em diversas áreas da matemática aplicada, tais como problemas reais de natureza atuarial e financeira e de investigação operacional.

A articulação entre conteúdos teóricos e práticos permite aos alunos adquirir uma visão abrangente dos fenómenos estudados bem como os dotará de capacidades para resolução de problemas práticos complexos.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The syllabus content of the Course provides students with an integrated view of the most common stochastic processes, providing them with skills and knowledge that enable them to adapt and study other types of phenomena.

The stochastic processes studied in more detail (points 2, 3 and 4 of the programmatic contents) will enable students to model a wide range of practical application phenomena in several areas of applied mathematics, such as real actuarial and financial problems and operational investigation.

The articulation between theoretical and practical contents allows the students to acquire a comprehensive view of the studied phenomena as well as equip them with the capacity to solve complex practical problems.

#### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

O objetivo principal da Unidade Curricular é dotar os alunos de ferramentas adequadas à modelação de fenómenos estocásticos.

Numa primeira fase, serão transmitidos os conteúdos essenciais de Processos Estocásticos, passando-se, numa segunda fase, à pormenorização de casos particulares tais como Processos de Poisson, Cadeias de Markov e

Será efetuada uma articulação entre a teoria destes processos e aplicações práticas a situações concretas e reais, sempre que possível.

As aulas decorrerão em regime de exposição de conteúdos, demonstração de resultados e resolução de pequenos exemplos, sendo também privilegiada a utilização de meios computacionais que permitam a resolução de problemas mais complexos.

A avaliação será efetuada através de avaliação escrita e trabalho prático computacional.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The main goal of the CU is to provide students with tools to model stochastic phenomena.

It is intended that students acquire theoretical and practical skills that allow them to understand and analyze this type of phenomena. It is also intended that students acquire the necessary knowledge to further deepen knowledge in this area.

In a first phase, the essential contents of Stochastic Processes will be transmitted, in a second phase to the detailing of particular cases such as Poisson Processes and Markov Chains.

There will be an articulation between the theory of the processes and practical applications to concrete and real situations, whenever possible.

Theoretical results will be based on content exposition, demonstration of results and resolution of small examples. On the practical it will be preferred the use of computational means that allow the resolution of more complex problems. The evaluation will be done through written evaluation and practical computational work.

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Pretende-se que os alunos adquiram competências teóricas e práticas que permitam entender e analisar os tipo de fenómenos modelados através de processos estocásticos. Pretende-se, ainda, que os alunos adquiram os conhecimentos necessários a um aprofundamento posterior do conhecimento nesta área.

Neste sentido, a exposição detalhada dos conteúdos teóricos e demonstração dos resultados principais dotarão os alunos das competências necessárias, não só à resolução de problemas práticos, mas também ao aprofundamento destas matérias, em situações futuras.

Por outro lado, a resolução computacional de problemas práticos fornece aos alunos capacidades importantes para resolução de problemas reais e concretos bem como de capacidades de análise critica aos resultados obtidos.

A resolução prática computacional fornece ainda aos alunos capacidades extra de programação na linguagem a

utilizar.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

It is intended that students acquire theoretical and practical skills that allow them to understand and analyze the types of phenomena modeled through stochastic processes. It is also intended that students acquire the necessary knowledge to further deepen knowledge in this area.

In this sense, the detailed presentation of theoretical contents and demonstration of the main results will give students the necessary skills, not only to solve practical problems, but also to deepen these subjects in future situations.

On the other hand, the computational resolution of practical problems provides students with important skills for solving real and concrete problems as well as analytical skills for the results obtained.

The practical computational resolution also provides students with extra programming skills in the language to use.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Hastings, K. (2010), Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition, CRC Press, Chapman & Hall

Jones, P.; Smith, P. (2010), Stochastic Processes - An Introduction, Second Edition, CRC Press, Chapman & Hall

Muller, D. (2007), Processos Estocásticos e Aplicações, Edições Almedina

Norris, J.R. (1997), Markov Chains, Cambridge University Press

Parzen, E. (1965), Stochastic Processes, Holden Day

Rohatgi, V.K., Saleh, A.K. (2001), An Introduction to Probability and Statistics, 2nd Ed, Wiley Series in Probability and **Statistics** 

Ross, S. M. (1996), Stochastic Processes, 2nd Ed., Wiley & Sons

Williams, D. (1991), Probability with Martingales, Cambridge University Press

# Anexo II - Topologia e Introdução à Análise Funcional

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Topologia e Introdução à Análise Funcional

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Topology and Introduction to Functional Analysis

## 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

# 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

## 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Elvira Júlia da Conceição Matias Coimbra - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Nesta UC pretende-se que o aluno adquira, compreenda e se familiarize com os conceitos fundamentais, os princípios elementares e os resultados gerais de Topologia e de Análise Funcional. Na unidade curricular serão estabelecidas as bases da teoria mais avançada dos espaços normados, dos espaços de Banach e dos espaços de Hilbert e, apesar da ênfase especial nos espaços lineares normados (de dimensão arbitrária), são desenvolvidas ideias estruturantes e estabelecidos resultados fundamentais em espaços métricos e espaços topológicos gerais, essenciais para o estudante que pretenda prosseguir estudos avançados em Matemática.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

The aim of the course is to provide the student with the concepts, methods and elementary techniques of General Topology and Functional Analysis. The course provides the foundations of the most advanced theory of normed spaces, Banach spaces, and Hilbert spaces, and despite the special emphasis on normed linear spaces (of arbitrary dimension), structural and fundamental results are established in general topological spaces, essential for the student who wishes to pursue advanced studies in mathematics.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Espaços métricos (revisão): noções topológicas, espaços completos, conjuntos compactos e continuidade de aplicações.
- 2.Lema de Riesz em espaços lineares normados. Corolários para a compacidade.
- 3. Operadores lineares limitados. Norma de um operador. Operadores lineares com domínio de dimensão finita. Funcionais lineares limitados. O espaço dual.
- 4. Espaços de Banach. Propriedades e exemplos. Séries em espaços de Banach.
- 5. Espaços lineares com produto interno. Espaços de Hilbert. Conjuntos ortonormados e séries. Conjuntos ortonormados maximais. O teorema da representação de Riesz-Fréchet. Operador adjunto. Problema da melhor aproximação.
- 6. Teoremas de Hahn-Banach. Teorema da Aplicação Aberta. Operadores fechados. Teorema do Gráfico Fechado.
- 7. Espaços topológicos. Convergência de sucessões. Espaços de Hausdorff. Continuidade e Homeomorfismos. Compacidade em espaços topológicos.
- 8. Conexidade em espaços topológicos. Conexidade na recta real. Componentes conexas. Conexidade por arcos.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Metric spaces (overview): topological notions, complete spaces, compact sets and continuity of applications.
- 2. Riesz's lemma for normed linear spaces. Corollaries for compactness.
- 3. Bounded linear operators. Norm of a bounded linear operator. Operators defined on finite dimensional spaces. Bounded linear functionals. The dual space.
- 4. Banach Spaces. Series in Banach spaces.
- 5. Linear spaces with inner product. Hilbert Spaces: Series related with orthonormal sets. Maximal orthonormal sets. The Riesz-Fréchet representation theorem. The adjoint operator. The problem of the best approximation.
- 6. Fundamental theorems in normed linear spaces. Hahn-Banach Theorems. Open-mapping theorem. Closed linear operators. Closed-Graph theorem.
- 7. Topological spaces. Convergence of sequences. Hausdorff spaces. Continuity and homeomorphisms. Compactness.
- 8. Connection in topological spaces. Connected set in the real line. Connected components. Arc-connected spaces.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Na primeira parte do programa pretende-se que o aluno domine os conceitos topológicos relacionados com os espaços métricos.

Na segunda parte do programa a ênfase é dada aos espaços lineares normados completos e aos principais resultados de espaços de Hilbert. As definições básicas e os resultados fundamentais de teoria de operadores são aí apresentados.

Na terceira e última parte do programa, generalizam-se todas as noções topológicas analisadas ao longo da unidade curricular aos espaços topológicos gerais.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The purpose of the first part of the program is to provide the students the domain of the fundamental concepts related with the notions of limits, continuity, compacity in the context of metric spaces.

In the second part of the program the emphasis is given to the complete normed linear spaces and the main results of Hilbert spaces. The basic definitions and fundamental results of operator theory are presented there.

In the third and last part of the program, all the topological notions analyzed throughout the course are generalized to the general topological spaces.

### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas teórico-práticas consistem na exposição dos conteúdos da disciplina, ilustrada com exemplos de aplicação. Durante estas aulas, os alunos serão chamados a resolver exercícios e a elaborar demonstrações de alguns dos resultados apresentados. Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas ou nas sessões destinadas a atendimento de alunos.

Os alunos poderão obter aprovação à disciplina por avaliação contínua, realizando três testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

During the Theoretical-Practical classes, the different contents of this course will be exposed. Students will be asked to solve exercises and elaborate proofs of some of the different results presented. Any questions or doubts will be addressed during the classes, or during the weekly sessions specially programmed to this effect. The students may obtain approval in this course during continuous evaluation, based on three tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

O principal objetivo das aulas teórico-práticas é a apresentação dos conceitos básicos, princípios fundamentais e métodos de Topologia e Análise Funcional. Em cada etapa, apresentam-se exemplos ilustrativos e efetuam-se demonstrações detalhadas dos teoremas essenciais. A fim de motivar os alunos, algumas perguntas são previamente introduzidas e dedica-se tempo à resolução de problemas previamente selecionados . As referências foram escolhidas como sendo as fontes disponíveis mais gerais. Os alunos são incentivados a aprofundar seus conhecimentos através de trabalho autónomo.

#### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The main objective of the Theoretical-Practical classes is the presentation of the basic concepts, fundamental principles and methods of Topology and Functional Analysis. At each step, illustrative examples are presented, and the proofs of the essential theorems are rigorously made. In order to motivate students, some questions are previously introduced, and time is spent solving previously selected problems. References were chosen as the most general available sources. Students are encouraged to deepen their knowledge through autonomous work

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. Bollobás, B. (1990), Linear Analysis, an Introductory Course, Cambridge University Press.
- 2. Conway, J. B. (2013). A course in functional analysis (Vol. 96). Springer Science & Business Media.
- 3. Kreyszig, E. (1978), Introductory Functional Analysis with Applications, New York: John Wiley & Sons.
- 4. Munkres James R. (1984), Topology: a First Course, Prentice-Hall Inc.
- 5. Sutherland, W. A. (2009), Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford University Press.

# Anexo II - Cálculo Financeiro

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Cálculo Financeiro

### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Financial Calculus

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Maria de Lourdes Belchior Afonso - TP:28

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Inês Jorge da Silva Sequeira - TP:28

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

Apreender conceitos introdutórios relacionados com a Matemática das Finanças;

Compreender as noções de valor temporal do dinheiro, juro e taxa de juro;

Calcular o Valor Atual e o Valor Acumulado de capitais em instantes distintos no tempo;

Compreender a noção de Renda Certa financeira e aplicá-la em diversos cenários;

Construir e analisar um Empréstimo Clássico e Empréstimos por Obrigações;

Análise da viabilidade de um investimento financeiro através do VAL e da TIR;

Conhecer algumas medidas de risco de taxa de juro;

A frequência desta Unidade Curricular fornecerá, ainda, conhecimentos necessários ao aprofundamento dos estudos em áreas do Atuariado e Finanças.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired the knowledge, skills and competences that will allow them to:

Learn introductory concepts related to Mathematics of Finance;

Understand the concepts of time value of money, interest rates and interest rate;

Calculate Current Value and Value Accumulated capital in different moments in time;

Understand the concept of Financial Annuities and apply it in various scenarios;

Build and analyse Classic Loans and Bond Loans;

Analysis of the viability of an investment by the NPV and IRR;

Identify some Risk Measures of Interest Rate.

This course will also provide the foundations to develop expertise in the areas of Actuarial Studies and Finance.

#### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Conceitos Básicos
- 2 Regimes de Capitalização
- 3 Equivalência de Capitais
- 4 Rendas
- 5 Reembolso de Empréstimos
- 6 Empréstimos por Obrigações
- 7 O Cálculo Financeiro e as Aplicações de Capital
- 8 Medidas de Risco de Taxa de Juro

# 9.4.5. Syllabus:

- 1 Basic concepts
- 2 Capitalization Regimes
- 3 Equity Capitals
- 4 Financial Annuities
- 5 Reimbursement of Loans
- 6 Bond Loans
- 7 Calculus and Financial Applications Capital
- 8 Risk Measures of Interest Rate

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O conteúdo programático da Unidade Curricular fornece aos alunos uma visão integrada do cálculo financeiro. A UC inicia-se com a apresentação de conceitos introdutórios e noções base para a progressão dos estudos. De seguida calcula-se o valor atual e capitalizado que permite a introdução da noção de renda certa financeira. Seguem-se aplicações dos conceitos anteriores nos empréstimos clássicos, nos empréstimos por obrigações, no valor atual líquido e taxa interna de rentabilidade. Termina-se com breves noções sobre algumas medidas de risco de taxa de juro.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The syllabus content of the Course provides students with an integrated view of financial mathematics. The unit begin with the presentation of introductory concepts and basic notions useful for the progression of the studies. Next, the

present value and capitalized value allows the introduction of the notion of annuity. The following are applications of the previous concepts in classical loans, bond loans, net present value and internal rate of return. Brief notions about some measures of interest rate risk end the syllabus.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

O docente expõe a matéria recorrendo a slides e privilegiando a troca de ideias para chegar ao objetivo de cada aula. Os alunos realizam trabalhos práticos de aplicação dos conceitos adquiridos nas aulas ao longo do semestre. Sempre que possível a matéria é ilustrada com exemplos reais da atividade financeira. As aulas decorrem em laboratório para ser possível aceder a conteúdos na internet e resolução de exercícios recorrendo a Excel.

A frequência à UC é obrigatória. A avaliação de conhecimentos é constituída por 3 elementos de avaliação:

- 1 Mini-Teste, (90 min) ou um trabalho prático.
- 2 Testes, (90 min cada), a realizar durante o semestre.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The teacher presents the themes using slides and privileging the exchange of ideas to reach the goal of each lesson. Students perform practical application of the concepts acquired in class throughout the semester. Whenever possible the matter is illustrated with real examples from insurance and Social Security. Classes take place in the laboratory to be possible to access content on the internet and solving using Excel.

Attendance at the course is mandatory. The assessment of the course has three evaluation elements:

- 1 Mini-Test (90 minutes) or an assignment.
- two tests, (90 minutes each), held during the semester.

#### 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A exposição da matéria em aulas teórico-práticas permite ao aluno a compreensão de conceitos de matemática financeira, bem como a utilização prática dos conceitos adquiridos. A aplicação dos conceitos teóricos na resolução de exercícios e nos casos de estudo práticos, permite aos alunos desenvolverem capacidades de conceptualização e resolução de problemas complexos, culminando no domínio da matéria em estudo e preparando-os para a resolução de problemas práticos na sua futura atividade profissional.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The presentation of subjects in the classes allow students to understand financial mathematics concepts as well as the practical use of acquired concepts. Applying the theoretical concepts in solving exercises, practical assignments and case studies, allow the students to develop skills in conceptualizing and solving complex problems resulting in expertise on the studied subjects and abilities to solve practical problems in future professional activity.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

MATIAS, R. (2007) Cálculo financeiro: teoria e prática; Escolar Editora. Vaaler, L. and Daniel, J. (2002). Mathematical Interest Theory. Mathematical Association of America Jorion, Philippe (2006) Value at Risk, 3rd Ed.: The New Benchmark for Managing Financial Risk; McGraw-Hill

## Anexo II - Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Differential Geometry of Curves and Surfaces

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

# 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

# 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Ana Cristina Malheiro Casimiro - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe permitam:

- Utilizar a análise matemática e a álgebra linear para a modelação de problemas geométricos
- Compreender a diferença entre curva/superfície parametrizada e curva/superfície e as noções fundamentais de curvatura nos diferentes contextos geométricos e o seu cálculo
- Saber usar coordenadas locais para resolver problemas geométricos
- Distinguir entre geometria local e global
- Perceber o significado do Teorema Egregium de Gauss

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him:

- To use mathematical analysis and linear algebra to model geometric problems
- To understand the difference between parameterized curve/surface and curve/surface and the fundamental notions of curvature at different geometric contexts and its computation
- To know how to use local coordinates to solve geometric problems
- To distinguish between local and general geometry
- To understand the meaning of Gauss' Egregium Theorem

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- Curvas no plano e no espaço euclidiano
- Definições. Curvas regulares. Mudança de parâmetro. Parametrização por comprimento de arco. Curvas fechadas.
- Teoria local de curvas planas.
- Teoria local de curvas no espaço.
- Teorema fundamental de curvas no espaço.
- Superfícies
- Definição e exemplos. Superfícies regulares. Representação local paramétrica e implícita. Mudança de coordenadas.
- Funções diferenciáveis. Plano tangente. Normais e orientação.
- Primeira forma fundamental.
- Diferencial. Difeomorfismos.
- · Curvatura de superfícies
- A segunda forma fundamental. As aplicações de Gauss e de Weingarten.
- Curvaturas normal e geodésica.
- Transporte paralelo e a derivada covariante.
- Curvaturas média, de Gauss e principais.
- Superfícies com curvatura de Gauss constante. Superfícies planas. Superfícies de curvatura média constante
- Geodésicas
- Teorema Egregium de Gauss
- Teorema de Gauss-Bonnet

## 9.4.5. Syllabus:

- · Curves in the plane and in the euclidean space
- Definitions. Regular curves. Reparametrization. Arc-length parametrization. Closed curves.
- Local theory of plane curves.
- Local theory of space curves.
- Fundamental theorem of curves in the space.
- · Surfaces in three dimensions
- Definition and examples. Regular surfaces. Parametric and implicit local representation. Change of coordinates.
- Differential maps between surfaces. Tangent plane at a point. Normals and orientation.
- First fundamental form.
- Differential of a map. Diffeomorphisms.
- Surface curvature
- Second fundamental form. Gauss and Weingarten maps.
- Normal and geodesic curvatures.
- Parallel transport and covariant derivative.
- Gaussian and mean curvature. Principal curvatures.
- Surfaces of constant gaussian curvature. Flat surfaces. Surfaces of constant mean curvature.
- Geodesics

- · Gauss' Theorema Egregium
- · Gauss-Bonnet theorem.

#### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os tópicos do conteúdo programático têm como objetivo que o aluno conheça e compreenda a utilização de ferramentas de análise matemática e de álgebra linear para a modelação de problemas geométricos, a diferença entre curva/superfície parametrizada e curva/superfície e as noções fundamentais de curvatura nos diferentes contextos geométricos e o seu cálculo, a utilização de coordenadas locais para resolver problemas geométricos, as diferenças entre geometria local e global e o significado do Teorema Egregium de Gauss.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics of the syllabus aim to provide that the student know and understand the use of mathematical analysis and linear algebra tools to model geometric problems, the difference between parameterized curve/surface and curve/surface and the fundamental notions of curvature at different geometric contexts and its computation, the utilization of local coordinates to solve geometric problems, the differences between local and general geometry and the meaning of Gauss' Egregium Theorem.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas, nas sessões semanais destinadas ao atendimento dos estudantes ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor.

O estudante pode realizar a disciplina por avaliação contínua que consiste na realização de dois testes. Em caso de insucesso, o estudante pode ainda apresentar-se a exame.

Os alunos para serem avaliados têm de assistir a, pelo menos, 2/3 das aulas teóricas lecionadas e 2/3 das aulas práticas lecionadas.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process.

Students can ask questions during the classes, in weekly scheduled sessions or in special sessions accorded directly with the professor.

There are two mid-term tests that can substitute the final exam in case of approval. Otherwise the student must pass the final exam.

In order to be evaluated, students must attend, at least, 2/3 of the lectures and 2/3 of the problem-solving classes.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Nas aulas teóricas é lecionada a matéria definida no programa, que é ilustrada com exemplos. São disponibilizadas, atempadamente, folhas de exercícios. Estes destinam-se a serem resolvidos pelos alunos quer nas aulas práticas quer como trabalho fora de aula.

A quase totalidade dos resultados é apresentada com a respetiva demonstração.

Antes de se expor a teoria de cada capítulo, o aluno tem à sua disposição textos de apoio e as respetivas folhas de exercícios. Alguns destes exercícios serão resolvidos em aula. A resolução dos restantes faz parte do trabalho pessoal do aluno.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

There are classes in which theory is lectured and illustrated by examples. There are also problem-solving sessions. Some exercises are left to the students to be solved on their own as part of their learning process. Most results are proven. Students have access to copies of the theory and proposed exercises. Some of the exercises are solved in class, the remaining are left to the students as part of their learning process.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Pressley, Elementary differential geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2012

- M. P. Carmo, Differential Geometry of curves and surfaces, Dover Publications, 2016.
- S. Montiel y A. Ros: Curves and surfaces. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 69 (2005).
- B. O'Neill, Elementary differential geometry, Elsevier, 2006

Christian Bär, Elementary Differential Geometry, Cambridge University Press, 2010.

# Anexo II - Matemática Financeira

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Matemática Financeira

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Financial Mathematics

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

## 9.4.1.5. Horas de contacto:

#### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Marta Cristina Vieira Faias Mateus - TP:28

### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Pedro José dos Santos Palhinhas Mota - TP:28

#### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Esta unidade curricular tem como principal objetivo que os alunos adquiram conhecimentos sobre os fundamentos dos modelos matemáticos para os mercados financeiros e para uma variedade alargada de produtos financeiros derivados. Pretende-se que os alunos compreendam as dinâmicas dos preços dos ativos financeiros e que sejam capazes de dar resposta a problemas de apreçamento de produtos derivados, de escolha optima de estratégias de investimento e delineamento de estratégias de cobertura de risco.

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

This curricular unit has as its main objective that students acquire knowledge about the fundamentals of mathematical models for the financial markets and for a wide variety of derivative financial products. It is intended that students understand the dynamics of the prices of financial assets and to be able to respond to problems of derivatives pricing, optimal portfolio choices and hedging.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Modelos discretos para mercados financeiros
- 1.1. Modelo Binomial
- 1.2. Mercados completos e arbitragem
- 1.3. Produtos derivados
- 1.4. Cobertura
- 1.5. Dividendos
- 1.6. Modelos estocásticos de obrigações e taxas de juro
- 1.7. Aplicações
- 2. Gestão de carteiras
- 2.1. Escolha do portfolio ótimo
- 2.2. Modelo de fatores
- 2.3 Modelo de equilíbrio de activos financeiros --- CAPM
- 2.4. Modelo de arbitragem --- APT
- 2.5. Aplicações

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Discrete models for financial markets
- 1.1. Binomial Model
- 1.2. Complete Markets and Arbitrage
- 1.3. Derivatives
- 1.4. Hedging
- 1.5. Dividends

- 1.6. Stochastic models of bonds and interest rates
- 1.7. Applications
- 2. Portfolio management
- 2.1. Optimal portfolio choice
- 2.2. Multi-factor models
- 2.3 Capital Asset Pricing Model --- CAPM
- 2.4. Arbitrage Models -- APT
- 2.5. Applications

## 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O modelo binomial, pela sua simplicidade, permite aos alunos o contacto com algumas noções fundamentais no âmbito da matemática financeira. Desde logo, o estudo da noção de arbitragem e em que condições um mercado é livre de arbitragem, torna possível fazer uma introdução aos produtos derivados e estudar os problemas de apreçamento e cobertura de risco dos mesmos. O estudo de modelos estocásticos discretos de taxas de juro e obrigações permite completar o desenvolvimento das competências necessárias à concretização dos objetivos de aprendizagem relativamente aos modelos discretos. Nos modelos de gestão de carteira introduzem-se os fundamentos matemáticos subjacentes à escolha eficiente de investimentos financeiros.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The binomial model, for its simplicity, allows the students the contact with some fundamental notions in the scope of financial mathematics. Firstly, the study of the notion of arbitrage and under what conditions a market is arbitrage-free, makes it possible to introduce derivative products and to study the problems of pricing and hedging. The study of discrete stochastic models for interest rates and bonds allows to complete the development of the competences necessary to achieve the learning objectives in relation to discrete models. The management portfolio models introduce the mathematical fundamentals underlying the efficient choices of investors.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas da unidade curricular são de natureza teórico-prática. A matéria teórica é exposta pelo docente, estimulandose a participação dos alunos. Recorre-se em seguida à resolução de exercícios de apoio à compreensão dos temas abordados. A avaliação contínua é composta por três momentos de avaliação (testes e/ou trabalhos), havendo a possibilidade de aprovação à disciplina por exame final.

#### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The content of the course is taught in theoretical-practical classes, during which interaction with students is stimulated. Problem sets with practical exercises to support understanding of the material covered in the theoretical classes are solved, to illustrate the theory. The evaluation is made up of three moments (tests and/or written reports), with the possibility of a final Test.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A metodologia baseada em aulas teórico-práticas, onde o docente expõe a matéria teórica seguida pela discussão e resolução de exercícios, tem-se mostrado adequada à concretização dos objetivos de aprendizagem na área da matemática. Esta metodologia, aliada a uma avaliação contínua como a proposta tem-se mostrado eficaz em termos de aprovação de alunos.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The methodology based on theoretical-practical classes, where the teacher exposes the theoretical subject followed by the discussion and resolution of exercises, has been shown to be adequate to the achievement of learning objectives in the area of mathematics. This methodology, coupled with a continuous assessment such as the proposal, has proven effective in terms of student approval.

## 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- Benninga, S., Financial Modeling, MIT Press 2008.
- Bingham, N. H.; Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer, 2004.
- · Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A., Essentials of Investments, McGraw-Hill, 2008.
- Hull, J., Options Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 2005.
- Lamberton, D., and Lapeyre, B., Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Second Edition, Chapman & Hall CRC, 2008.
- Pires, C.P., Mercados e Investimentos Financeiros, Escolar Editora, 3ª edição, 2011.

# Anexo II - Mecânica Analítica

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Mecânica Analítica

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Analytical Mechanics

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

#### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Luís Manuel Trabucho de Campos - TP:56

#### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

## 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Descrever as equações da Mecânica em coordenadas gerais.

Compreender o que é uma Lei da Física.

Familiarizar o aluno com as técnicas matemáticas mais usadas no estudo da mecânica.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

Describe the equations of mechanics in general coordinates.

Understand what a Law of Physics is.

This is the first contact for a Mathematics student with the Mathematical techniques for mechanics, in an applied setting.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

Parte I - Dinâmica das Partículas Cinemática das Partículas Cinética das Partículas Cinética de um sistema de Partículas

Parte II - Dinâmica dos Corpos Rígidos Cinemática dos Corpos Rígidos Cinética dos Corpos Rígidos

Parte III - Vibrações Mecânicas

Parte IV - Cálculo das Variações Equações de Euler-Lagrange Princípio de Hamilton

## 9.4.5. Syllabus:

Part I - Dynamics of Particles Kinematics of Particles Kinetics of Particles Kinetics of Systems of Particles

Part II - Dynamics of Rigid Bodies Kinematics of Rigid Bodies Kinetics of Rigid Bodies

Part III - Mechanical Vibrations

Part IV - Calculus of Variations **Euler-Lagrange Equations** Hamilton's Principle

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Trata-se de um programa possível para este tipo de disciplina de uma Licenciatura em Matemática, usados nas mais prestigiadas universidades mundiais.

Os conteúdos programáticos percorrem todos os itens referidos nos objetivos da UC e são, na nossa opinião, suficientes para um aluno médio ficar com os conhecimentos base.

### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

It is a possible program for this type of curricular unit in Mathematic, used at the most prestigious universities in the world

We are offering standard material to accomplish the objectives of the course. They are, in our view, sufficient for the average student to learn the basic material.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas terão um carácter teorico-prático. Além da exposição da matéria, que é ilustrada com exemplos de aplicação, são propostos, para resolução pelos alunos, exercícios de aplicação dos métodos e resultados apresentados.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas ou nas sessões destinadas a atendimento de alunos ou ainda em sessões combinadas diretamente entre aluno e professor.

A avaliação consiste em trabalhos realizados pelos alunos.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The classes will have a theoretical and practical character. In addition to the presentation of the subject, which is illustrated with examples of application, are proposed for resolution by students, exercises of application of the methods and results presented.

Any questions are answered in the course of classes or sessions designed to attend students or in sessions arranged directly between student and teacher.

The assessment consists in the evaluation of work reports written by the students.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de modelação de problemas e seleção da metodologia mais adequada para a respetiva resolução.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio de um professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades. A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for modeling problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties. The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

C. Fox — An Introduction to the Calculus of Variations, Dover, 1987

H. Goldstein, C.P. Poole and J.L. Safko, — Classical Mechanics, 3rd ed., Addison Wesley, 2001

L.N. Hand and J.D. Finch — Analytical Mechanics, Cambridge University Press, 1998

J.V. José and E.G. Saletan — Classical Dynamics, Cambridge University Press, 1998

J.B. Marion and S.T. Thornton — Classical Dynamics of Particles and Systems, 4th ed., Saunders College Publishing,

M.C. Povoas, Métodos Matemáticos da Física – Uma Introdução, Colecção Textos de Matemática, 17, Departamento de Matemática, FCUL, 2002

H. Sagan — Introduction to the Calculus of variations, McGraw-Hill, 1969

#### Anexo II - Modelação de Sistemas

#### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Modelação de Sistemas

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Systems Modelling

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

6

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Ruy Araújo da Costa – TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Os estudantes depois da u.c. devem ser capazes de:

- perceber a necessidade de, por vezes, adaptar os modelos clássicos estudados em outras u.c.s
- ser capazes de proceder à referida adaptação e sua implementação.
- entender a relevância dos tópicos abordados nos diferentes "case studies".

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

After this course, a studente should be able to:

- understand that, sometimes, classical models introduced in other courses need to be adapted.
- be able to make the necessary adaptations and implement them.
- understand the relevance of the subjects behind the different case studies.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Introdução à Modelação de Sistemas e/ou Processos.
- 2. Modelação de Sistemas / Aplicações: Resolução de "Case Studies":
- 2.1 Introdução às Heurísticas: O Problema da Mochila.
- 2.2 Otimização com restrições Multiplicadores de Lagrange.
- 2.3 Caraterização da relação de dependência entre valores consecutivos de uma série temporal.
- 2.4 Introdução à Estatística de Extremos a distribuição de Gumbel.
- 2.5 Modelação de Processos de Poisson; relação entre as distribuições Exponencial e de Poisson.
- 2.6 Filas de Espera: aditividade de Processos de Poisson.
- 2.7 Gestão de Stocks: abordagem conjunta da política de descontos e de uma restrição financeira.
- 2.8 Previsão: modelo com tendência não linear e sazonalidade.
- 2.9 Cadeias de Markov Políticas de Manutenção de equipamentos.
- 2.10 Simulação.
- 2.11 Fiabilidade (simulação).
- 2.12 Gestão de Projetos (simulação).

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. Introduction to Systems and/or Processes Modelling.
- 2. Systems Modelling / Applications: Solving Case Studies:
- 2.1 Introducing Heuristics: The Backpack Problem.
- 2.2 Optimization with constraints Lagrange Multiplyers.
- 2.3 Time Series analysis.
- 2.4 Introduction to Gumbel distribution.
- 2.5 Modelling Poisson Processes; the Exponential and Poisson distributions and their relationship.
- 2.6 Queeing Systems: additivity of Poisson Processes.
- 2.7 Inventory Control: discount policy + budget constraint.
- 2.8 Introduction to Forecasting.
- 2.9 Markov Chains Maintenance Policies.
- 2.10 Simulation.
- 2.11 Reliability (simulation).
- 2.12 Project Management (simulation).

#### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os conteúdos programáticos visam concluir a formação básica na área de IO, garantindo que os estudantes não usam apenas os modelos clássicos, mas, se necessário, são capazes de proceder à sua adaptação a diferentes contextos.

Para aumentar a coerência da abordagem, as aulas recorrem a "case studies".

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics in this course are the conclusion of the Operations Research basic training. Students no longer only use the classical models, but may be able to adjust them to different contexts, when necessary.

Case Studies are used extensively.

### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas teórico-práticas decorrem em laboratório computacional.

A aula típica começa com o acesso à plataforma moodle, onde cada grupo de 2 a 4 estudantes recolhe o enunciado do Case Study (Problema Formativo, PF) a analisa os respetivos dados.

Segue-se um período de resolução, devendo os estudantes enviar uma síntese dos resultados obtidos para o docente, via moodle.

Cada aula termina com uma reflexão sobre as abordagens seguidas pelos diferentes grupos de estudantes, análise dos resultados e enquadramento do Case Study no contexto da IO.

São disponibilizadas Notas Pós-Aula para ajudar no enquadramento do Case Study.

A classificação final na unidade curricular tem em conta os resultados obtidos nas diferentes áreas avaliadas (PFs, Trabalho de Grupo e Teste individual). Há defesa de nota (trabalho complementar e/ou oral) para classificações superiores a 17.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes take place in a computer laboratory.

Each class starts with groups of 2 to 4 students accessing the moodle e-learning platform to see the Case Study and its data.

After solving the Case Study, students should send a summary of results to the teacher, via moodle.

Each class ends with an analysis of different solving strategies and the Case Study is looked in the broader scope of

Case Study Notes are made available after each class.

Final grade takes into account the performance of a student in Case Studies, Group assignment and Individual Test. Grades above 17 require a complementary assessment.

## 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

De modo a maximizar a aprendizagem, as aulas teórico-práticas assentam essencialmente na resolução de Case Studies (Problemas Formativos).

Há um Horário de Atendimento semanal disponível para apoiar os estudantes.

Os Problemas Formativos, o Trabalho de Grupo, o Teste e a exigência de Frequência destinam-se a pressionar os estudantes a um contacto regular com a u.c., com vista a maximizar o seu sucesso.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In order to satisfy the learning outcomes, classes use extensively Case Studies to present different topics.

There is a weekly office hours schedule, to support students learning.

Case Studies, Group assignment, the Test, as well as requirements to complete assessment (Frequência), are supposed to pressure students into a regular contact with the course, thus maximizing their success.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. How to Model It Problem Solving in the Computer Age (1990), Starfield, A; Smith, K. e Bleloch, A. Mc Graw Hill Int.
- 2. Strategies for Creative Problem Solving (1994), Fogler, H.S.; LeBlanc, S.E Prentice Hall.
- 3. Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences (1988), Siegel, S. Castellan Jr., N. Mc Graw Hill Int..
- 4. Excel 2007 Data Analysis and Business Modelling (2007), Winston, W Microsoft Press

## Anexo II - Modelos de Apoio à Decisão

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Modelos de Apoio à Decisão

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

**Decision Support Models** 

# 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Maria Isabel Azevedo Rodrigues Gomes - TP:56

## 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

### 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- Conhecer e compreender os conceitos elementares de Teoria da Decisão;
- Compreender as problemáticas associadas à subjetividade inerente à tomada de decisão e reconhecer como diferentes metodologias modelam essa subjetividade;
- Identificar problemas de Programação Linear Multiobjectivo (PLMO);
- Ser capaz de aplicar diversos métodos para obter de soluções de compromisso em problemas de PLMO
- Ser capaz de modelar e resolver problemas que poderão encontrados em situações reais;

## 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge, skills and competences that allow

- to know and understand elementary concepts of Decision Theory;
- to understand issues related with to subjectivity inherent to decision making and to recognize how different methodologies model this subjectivity;
- to identify Multiobjective Linear Programming (PLMO) problems
- to be able to apply various methods to obtain compromise solutions of PLMO problems.
- to be able to model and solve problems that may be encountered in real situations;

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- Decisão Uni-Critério: Decisão em Situação de Incerteza; Decisão em Situação de Risco; Decisões sequenciais e Arvores de Decisão; Teoria da Utilidade;
- Decisão Multicritério: Modelos Compensatórios Técnica SMART e TOPSIS; Modelos Não-Compensatórios -Métodos ELECTRE; Modelos Hierárquicos - Filosofia AHP.
- Optimização Multiobjectivo: Soluções e Objetivos. Dominância e Eficiência; Modelos com somas agregadas; Modelos com vetores de pesos; Modelos com mudança de escala; Modelos de redução da região admissível; Programação por Metas; Modelos Interativos: STEM.

# 9.4.5. Syllabus:

- Single criterion decision: Decision and Uncertainty; Decision and Risk; Sequential Decisions and Decision Trees; Utility Theory;
- Multicriteria Decision: Compensatory Models SMART Technique and TOPSIS; Non-Compensatory Model -ELECTRE Methodology; Hierarchic Models - AHP.
- Multiobjective Optimization: Solutions and Objectives. Dominance and Efficiency; Aggregated Sum Models; Weight Vectors Models; Change of Scale; Reduction of Feasible Region; Goal Programming; Interactive Models: STEM.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular O capítulo 1, dedicado à tomada de decisão em contexto Uni-objetivo, cobre o primeiro objetivo de aprendizagem e. parcialmente, o segundo. O capítulo 2 desenvolve as metodologias Multicritério e, portanto, completa o segundo objetivo de aprendizagem. O último capítulo, Otimização Multiobjectivo, permite atingir o terceiro e quatro objetivos programáticos. Por fim, a resolução em aula de casos de estudo inspirados em casos reais permite ao aluno atingir o último obietivo apresentado.

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

Chapter 1, dedicated to single objective decision making, covers the first learning objective and partly the second. Chapter 2 addresses multicriteria methodologies and thus completes the second learning objective. The last chapter, multiobjective optimization, covers the third and four learning objectives. Finally, the resolution of case studies inspired by real cases allows the student to achieve the last learning objective.

## 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

Cada aula de 4 horas será composta por duas partes; uma expositiva, na qual a matéria será introduzida aos alunos; e uma exploratória, na qual os alunos desenvolverão a assunto estudado analisando, resolvendo e discutindo problemas inspirados em casos reais. As aulas decorrerão em laboratório computacional.

A avaliação continua é composta por uma componente individual e/ou uma de grupo de acordo com o regulamento de avaliação da FCT NOVA. Os alunos que não obtiverem a aprovação na avaliação continua poderão tentar aprovar em Exame.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Each 4-hour lesson will have two parts: during the expositive part, the studied subject will be presented to the students; during the exploratory part, students will analyses, solve and discus problems inspired in real cases. Lessons will be held on a computational lab.

Mid-term evaluation consists of an individual component and / or a group component according to the FCT NOVA evaluation regulation.

Students who do not pass the continuous assessment may try to pass a final Exam.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A estrutura das aulas proporciona a integração imediata dos conceitos teóricos com a vertente aplicada, através da resolução e discussão de problemas baseados em casos reais. Esta abordagem permite, também, responder ao último objetivo de aprendizagem. As aulas em laboratório computacional permitem que os alunos tenham contacto com algumas aplicações informáticas de distribuição comum utilizadas nesta área (Excel e Geogebra) e de software especializado (ex. GMAS/CPLEX). Permite ainda que sejam propostos aos alunos problemas complexos.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

The structure of the classes provides the immediate integration of theoretical concepts with applied aspect, through the resolution and discussion of problems based on real cases. This approach also makes it possible to address to the last learning objective. Computer lab classes allow students to have contact with some common distribution computer applications used in this area (Excel and GeoGebra) and specialized software (e.g. GMAS / CPLEX). It also allows students to address complex problems.

## 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Anderson, David R., et al. Quantitative Methods for Business. Cengage Learning, 2012. Antunes, C. H., Alves, M. J., & Clímaco, J. (2016). Multiobjective linear and integer programming. Cham: Springer. Goodwin, P. e Wright, G. - Decision Analysis for Management Judgement (2014 - 5th ed.) - John Wiley & Sons Hillier, Lieberman, Introduction to Operations Research, Mc Graw - Hill, 10th ed (2015) - or any other edition Saaty, T. L.- The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation (1990) - RSW Publications Steuer, R. E.- Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application (1986) - John Wiley & Sons

#### Anexo II - Modelos Lineares em Estatística

#### 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Modelos Lineares em Estatística

## 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Linear Models in Statistics

### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

168

## 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

#### 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Miguel dos Santos Fonseca - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

- Dar aos alunos uma visão alargada do Modelo Linear (Regressão Linear Simples e Múltipla, Análise de Variância, Análise de Covariância) com ênfase na inferência associada a estes modelos, nomeadamente na inferência relacionada com os testes de ajustamento destes modelos e testes a parâmetros e grupos de parâmetros.
- \* Apresentar aos alunos o Modelo Linear como uma ferramenta que generaliza algumas das técnicas inferenciais estudadas noutras disciplinas anteriores no Curriculum, como os usuais teste T a duas amostras (independentes ou emparelhadas).
- \* Utilização de um software para a implementação dos modelos estudados e realização dos testes apresentados.

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

- \* Give the students and enlarged view of the Linear Model (Simple and Multiple Regression, Analysis of Variance, Analysis of Covariance) with emphasis placed on the related inferential processes, namely the one related with the test of fit of the models and the tests to individual parameters or groups of parameters.
- \* Introduce the Linear Model as a tool that generalizes some of the inferential techniques given to the students in previous courses in their Curriculum, as the usual T tests for two samples (independent or paired).
- \* Use of a software to implement the models studied and to carry the tests proposed.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Modelo Linear (ML): Formulações; o valor esperado cond. na modelação de v.a.'s
- 2. A Regressão Linear (RL): Estimação dos parâmetros: método dos mín. quadrados; distribuições dos estimadores; estimação da variância do erro; inferência: testes ao ajustamento, aos parâmetros e entre Modelos e Submodelos; os métodos Backward, Forward e Stepwise; teste de 'lack-of-fit'; análise de resíduos e teste para outliers; transformações das variáveis; abordagem matricial do ML; bandas de confiança; colinearidade; testes entre Modelos de RL
- 3. A Análise de Variância (AV): teste à iguald. da média de populações Normais; o Modelo de AV a um factor, com efeitos fixos; vantagens da abordagem via ML; comparações múltiplas de médias; os delineamentos com 2, 3 ou mais factores de efeitos fixos; teste à iguald. da média de populações, para am. emparelhadas; o Modelo de Blocos casualizados; Modelos de ef. aleatórios e mistos.

#### 9.4.5. Syllabus:

- 1. The Linear Model (LM): Formulations; the cond. expected value in modeling r.v.'s
- 2. The Linear Regression (LR): Estimation of parameters: the mean square method; distributions of estimators; estimating the error variance; inference: tests of model fit, to parameters and between Models and Submodels; the Backward, Forward and Stepwise methods; the 'lack-of-fit' test; residual analysis and outlier test; transformation of variables; the matrix approach to LM; confidence bands; colinearity; tests among LR models
- 3. The Analysis of Variance (AV): testing the equality of Normal means; the AV model with 1 factor, with fixed effects; advantages of the LM approach; multiple comparisons of means; the designs with 2, 3 or more factors with fixed effects; testing the equality of population means, for paired samples; the randomized Block design; Models with random and mixed effects

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

O Modelo Linear (ML) é apres. como caso particular da modelação de uma v.a. através da expressão do seu valor esperado condicional como função dos valores de outras v.a.'s.

Pretende-se assim dar aos alunos uma visão abrangente do que é a modelação em Estatística e do que são os MLs em particular. Passa-se então a um estudo detalhado dos dois MLs mais comuns.

Começando com a Regressão Linear (RL) Simples, passaremos para a RL Múltipla, utilizando como suporte a formulação matricial do Modelo de RL.

Entre os modelos de Análise de Variância será dada especial atenção aos modelos fatoriais de efeitos fixos como generalização do teste à igualdade de médias com base em a.a.'s indep.'s, e ao modelo de Blocos casualizados, como generalização do teste à igualdade das médias com base em a.a.'s empar.'s, sendo depois analisados os modelos com efeitos aleatórios e mistos.

Por último o modelo de Análise de Covariância como modelo englobante

#### 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The Linear Model (LM) is introduced as a particular case of the modelization of a r.v. by expressing its conditional expected value as a function of the values of other r.v.'s.

This way we want to give students an all-embracing view of what is statistical modelization and what is the LM in particular. We pass then to the detailed study of the two most common LMs.

Starting with the simple Linear Regression (LR) we pass on to the multiple LR, bridging through the matrix formulation of the LR model.

Among the Analysis of Variance models we will pay particular attention to the factorial fixed effects models as a generalization of the testo f equality of two means, based on independente samples, and to the random block design, as a generalization of the testo f equality of two means, based on paired samples, passing then to the random and mixed effects models.

Finally, the Covariance Analysis model as an all-embracing model.

#### 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teóricas/práticas participadas, com exposição oral dos conceitos e metodologias devidamente complementada com exemplos e resoluções de problemas. Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com os professores.

Os alunos necessitam de assistir a um mínimo de 2/3 das aulas teóricas/práticas lecionadas para se submeterem a avaliação. A avaliação contínua é baseada em dois ou três testes. Se um aluno não obtiver aprovação através de avaliação contínua poderá vir a obtê-la num exame de recurso.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes are theoretical/practical with oral presentation of concepts, methodologies, and examples, complemented with problem solving. Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with

Students need to attend a minimum of two thirds of the classes in order to be evaluated. Continuous evaluation is based on two or three tests. If a student does not obtain approval through continuous evaluation he can try it in an additional assessment.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Só com um conjunto bem elaborado e devidamente sequenciado de aulas teórico/práticas, onde são introduzidos os principais conceitos e resultados formais, seguido de perto resolução de problemas, a maioria dos quais utiliza dados reais, embora alguns tenham sido' moldados' de forma a darem origem a situações que tem interesse considerar e analisar, intimamente relacionados com os conceitos e resultados introduzidos, é possível apresentar aos alunos o Modelo Linear, nas suas duas vertentes mais conhecidas e mais utilizadas, que são a Regressão Linear e a Análise de Variância, de forma a os alunos ficarem quer com uma sólida formação teórica quer com a plena capacidade de implementarem tais modelos na prática e sabendo-os analisar devidamente.

# 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

Only with a set of well delineated and well sequenced theoretical/practical classes, where the main concepts and results are introduced, closely followed by problem solving that use real data sets, some of which were 'slightly changed' in order to lead to situations and issues which we want to address, but which are intimately related with the concepts and results show, it will be possible to give students a solid preparation and background in terms of the Linear Model, in its two most used and common facets, the Linear Regression and the Analysis of Variance models, which will enable them to obtain a solid theoretical formation which in turn will give them the ability to implement these models in practice, knowing well how to analyse the corresponding outputs.

#### 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Bibliografia base:

Coelho, C. A.1998. Análise de Regressão.

Draper, N. R. e Smith, H.1998. Applied Regression Analysis. 3.a ed., Wiley-Interscience, J. Wiley & Sons, New York.

Cap.s1-9, 11-15, 17, 20, 21

Weisberg, S.1985. Applied Linear Regression. 2.a ed., J. Wiley & Sons, New York. Cap.s1-9, 12

Scheffé, H.1959. The Analysis of Variance. J. Wiley & Sons.

Leitura complementar:

Myers, R. H.1986. Classical and Modern Regression with Applications. Duxbury Press, Boston. Cap.s1-9

Sen, A. e Srivastava, M.1990. Regression Analysis - Theory, Methods and Applications, Springer, New York. Cap.s1-5,

Seber, G. A. F.1977, Linear Regression Analysis, J. Wilev & Sons, New York, Cap.s 3-8, 12

Montgomery, D. C. e Peck, E. A.1982. Introduction to Linear Regression Analysis. J. Wiley & Sons, New York. Cap.s1-9 Montgomery, D.2012. Design and Analysis of Experiments John Wiley & Sons

Dagnelie, P.1981. Principes d'Experimentation, Les Presses Agronomiques de Gembloux, Gembloux, Bélgica. Cap.s1-

#### Anexo II - Otimização Não Linear

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Otimização Não Linear

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Non Linear Optimization

### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

252

### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

# 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

# 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Ana Luísa da Graça Batista Custódio - TP:56

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

No final desta unidade curricular o estudante terá adquirido conhecimentos, aptidões e competências que lhe

- 1. Identificar um problema como pertencente a uma classe de problemas de otimização não linear.
- 2. Identificar o método de otimização não linear mais adequado à resolução de um dado problema, estando consciente das suas vantagens e fragilidades numéricas.
- 3. Compreender a estrutura algorítmica de diferentes métodos de otimização não linear e quais as características necessárias à garantia da sua convergência.
- 4. Identificar problemas de otimização sem recurso a derivadas e de otimização estocástica e conhecer as principais metodologias e algoritmos adequados à sua resolução.

#### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

At the end of this course the student will have acquired knowledge and skills that will enable him to:

- 1. Identify a problem as belonging to a nonlinear optimization problem class.
- 2. Identify the nonlinear optimization method most adequate to the solution of a given problem, being aware of its advantages and the corresponding numerical limitations.
- 3. Understand the algorithmic structure corresponding to different nonlinear optimization methods and which are the key features required for establishing the corresponding convergence.
- 4. Identify derivative-free optimization problems and stochastic optimization problems and know the main methodologies and algorithms for their resolution.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1. Otimização não linear sem restrições
- 1.1 Básicos (convexidade e condições de otimalidade).
- 1.2 Métodos de descida máxima e de Newton para otimização local.
- 1.3 Métodos de quasi-Newton.
- 1.4 Estratégias de procura unidirecional.
- 1.5 Métodos de regiões de confiança.
- 1.6 Introdução a métodos de otimização sem recurso a derivadas.
- 2. Otimização não linear com restrições
- 2.1 Básicos (análise do caso convexo e condições de otimalidade).
- 2.2 Programação quadrática.
- 2.3 Métodos de penalidade, de barreira e do Lagrangiano aumentado.
- 3. Problemas de mínimos quadrados (não lineares).
- 4. Uma breve introdução à otimização estocástica.

# 9.4.5. Syllabus:

- 1. Unconstrained nonlinear optimization
- 1.1 Basics (convexity and optimality conditions).
- 1.2 Gradient-type methods and Newton method for local optima.
- 1.3 Quasi-Newton methods.
- 1.4 Line search strategies.
- 1.5 Trust region methods.
- 1.6 Introduction to derivative-free optimization methods.
- 2. Constrained nonlinear optimization
- 2.1 Basics (convex-constrained case and optimality conditions).
- 2.2 Quadratic programming.
- 2.3 Penalty, barrier and augmented Lagrangian methods.
- 3. Least squares problems (nonlinear).
- 4. A brief introduction to stochastic optimization.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os tópicos abordados constituem um programa base em otimização não linear. Contudo, propõe-se a lecionação de dois capítulos introdutórios de matérias atuais e relevantes, nomeadamente a Otimização Sem Recurso a Derivadas e a Otimização Estocástica.

A primeira é uma área de extrema aplicabilidade em problemas de engenharia, onde é frequente recorrer a implementações computacionais comerciais, encaradas como caixas-negras, para avaliar a função a otimizar. A Otimização Estocástica assume um papel relevante, numa altura em que a área do big data se encontra em pleno desenvolvimento, procurando-se soluções eficientes que permitam extrair informação relevante de dados.

Em qualquer um dos capítulos que constituem o programa serão apresentados exemplos ilustrativos, permitindo ao estudante familiarizar-se com a classe de problemas em causa. Para cada classe de problemas serão estudadas as suas características principais, bem como algoritmos adequados à respetiva resolução.

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The topics covered are a basic syllabus in nonlinear optimization. Although, two relevant and update introductory chapters are proposed, namely Derivative-free Optimization and Stochastic Optimization.

The first is a topic of extreme applicability in engineering problems, where it is current the use of commercial computational implementations, seen as black boxes, for evaluation of the function to be optimized. Stochastic Optimization has a relevant role, in a time where the big data area is fully developing, being required efficient solutions that allow to extract relevant information from data.

Examples of problems will be provided, allowing the student to be familiar with the problem class under analysis. The main characteristics of each problem class, as well as algorithms for the corresponding solution, will be analyzed.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

O curso é lecionado em laboratório computacional, num regime de 4 horas semanais de aulas teórico-práticas, podendo também funcionar em regime tutorial.

A exposição dos conceitos teóricos será acompanhada de exemplos ilustrativos e apoiada quer por diapositivos, quer pela bibliografia adoptada. A componente prática/laboratorial confere à unidade curricular uma vertente aplicada, onde os algoritmos analisados serão usados na resolução de problemas.

Eventuais dúvidas poderão ser esclarecidas no decurso das aulas ou em sessões individuais marcadas com o professor.

A aquisição de conhecimentos será avaliada de acordo com o Regulamento de Avaliação de Conhecimentos da FCT NOVA, incluindo pelo menos uma prova escrita, sem consulta e com duração máxima de 3 horas, e pelo menos um trabalho prático, correspondente a uma implementação computacional.

Caso a nota obtida na prova escrita não permita a obtenção de aprovação, o aluno poderá repetir a prova escrita na data de recurso.

## 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The course is lectured in a computational laboratory, 4 hours per week of theoretical-practical classes, although it can also be lectured in tutorial mode.

The theoretical concepts are presented jointly with illustrative examples and supported by slides and the adopted bibliography. The practical/laboratorial component grants an applied feature to the curricular unit, where the algorithms studied will be used in the resolution of some problems.

Specific student difficulties will be addressed during classes or in individual sessions scheduled with the professor.

The knowledge acquisition will be evaluated according to the General Rules of Evaluation of Knowledge of FCT NOVA, including at least a written test, with no consult of bibliography and with a maximum duration of 3 hours, and a practical work, corresponding to a computational implementation.

If the grade obtained in the written test does not grant the approval, the student can repeat it in a second epoch of evaluation.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

A apresentação de conceitos e metodologias, apoiados com exemplos ilustrativos, pretende motivar os estudantes para a relevância dos tópicos estudados, desenvolvendo a sua capacidade de identificação de problemas e seleção da metodologia mais adequada para a respetiva resolução.

Os alunos terão oportunidade de testar estas capacidades nas aulas, com o apoio do professor, ou em estudo individual, comparecendo eventualmente a sessões de atendimento individual, em caso de dificuldades.

A avaliação da unidade curricular incide sobre a aquisição das competências referidas.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In classes, concepts and methodologies are presented and illustrated with examples, motivating students for the relevance of the corresponding study, and developing student's ability for identifying problems and selecting the most adequate methodology for the corresponding resolution.

Additionally, classes will allow students to test these skills, under the supervision of a professor. Students can also test these skills by themselves, scheduling individual appointments with professors in case of difficulties.

The evaluation of the curricular unit focuses in the acquisition of the mentioned capabilities.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- 1. C. Audet, W. Hare, Derivative-Free and Blackbox Optimization, Springer, 2017
- 2. D. P. Bertsekas, Nonlinear Programming, second edition, Athena Scientific, 1999
- 3. J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. A. Sagastizábal, Numerical Optimization, Springer, 2006
- 4. L. Bottou, F. E. Curtis, J. Nocedal, Optimization methods for large-scale machine learning, SIAM Review, 60, 223-311, 2018
- 5. F. E. Curtis, K. Scheinberg, Optimization methods for supervised machine learning: from linear models to deep learning, The Operations Research Revolution, R. Batta, J. Peng, J. C. Smith, H. J. Greenberg (editors), 89-113, 2017
- 6. I. Griva, S. G. Nash, A. Sofer, Linear and Nonlinear Optimization, second edition, SIAM, 2008
- 7. J. Nocedal, S. J. Wright, Numerical Optimization, second edition, Springer, 2006

# Anexo II - Sistemas de Informação e Estatística

# 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Sistemas de Informação e Estatística

### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Statistics and Information Systems

### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

#### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

## 9.4.1.4. Horas de trabalho:

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

# 9.4.1.6. ECTS:

#### 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

#### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

## 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Pedro Alexandre da Rosa Corte Real - TP:42

### 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

<sem resposta>

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Permitir que os alunos apliquem métodos de estatística e ciências da computação em situações de interesse prático, isto é, com a dados do mundo real para responder questões de interesse económico e comercial evidente, entre outras, em particular com a aplicação a problemas envolvendo interesses seguráveis, de longo e curto prazo, segurança social, planos de pensões, cuidados de saúde e problemas financeiros.

Serão privilegiados problemas práticos correspondentes a situações reais.

### 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

To enable students to apply methods from statistics and computer science to real-world data sets in order to answer business and other questions, in particular with application to questions in long and short term insurance, social security, retirement benefits, healthcare and investment.

Practical problems corresponding to real situations will be privileged.

# 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- 1 Dados como Recurso para Resolução de Problemas
- Descrever os possíveis objetivos de uma análise de dados (por exemplo, descritivo, inferencial, preditivo).
- Descrever as etapas da realização de uma análise de dados para resolver problemas práticos de forma científica justificando as ferramentas adequadas.
- 2 Análise de dados
- Descreva o objetivo da análise exploratória de dados.
- Usar bibliotecas computacionais para ajustar vários tipos de modelos estatísticos.
- 3 Aprendizagem Estatística
- Explicar o significado dos termos aprendizagem estatística e aprendizagem de máquinas e a diferença entre aprendizagem supervisionada e aprendizagem não supervisionada
- 4 Problemas Profissionais e de Gestão de Riscos
- Explicar as questões éticas e regulamentares envolvidas no trabalho com dados pessoais e sensíveis e conjuntos de dados de grande volumetria.
- 5 Visualização de Dados e Relatórios ("Reporting")
- Criar gráficos apropriados para comunicar as principais conclusões de uma análise.

## 9.4.5. Syllabus:

- 1 Data as a Resource For Problem Solving
- Describe the possible aims of a data analysis (e.g. descriptive, inferential, predictive).
- Describe the stages of conducting a data analysis to solve real-world problems in a scientific manner and describe tools suitable for each stage.

- 2 Data Analysis
- Describe the purpose of exploratory data analysis.
- Use a computer package to fit a generalized several statistical models..
- 3 Statistical Learning
- Explain the meaning of the terms statistical learning and machine learning and the difference between supervised learning and unsupervised learning.
- 4 Professional And Risk Management Issues
- Explain the ethical and regulatory issues involved in working with personal data and extremely large data sets.
- 5 Visualizing Data and Reporting
- Create appropriate data visualizations to communicate the key conclusions of an analysis.

# 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular O conteúdo programático da Unidade Curricular permite aos alunos perceber a importância e contactar com métodos básicos de manipulação de bases de dados estruturadas com grande volumetria.

Permite ainda aos alunos tomarem conhecimento com técnicas elementares e manipulação de grandes bases de dados e ainda desenvolver, de modo expedito e sem custos, processos exploratórios essenciais a qualquer análise de dados com objetivos práticos bem identificados.

Esta análise exploratória, passa por aplicar bibliotecas computacionais ("packages") que possam, de uma forma quase imediata, ajudar a organizar, visualizar e fazer algumas análises elementares às bases de dados com um esforço de desenvolvimento mínimo.

Obriga os alunos a desenvolver espírito crítico para os resultados produzidos pelas várias bibliotecas computacionais e a comparar resultados contraditórios, preparando relatórios que permitam melhor compreender estruturas de dados compiladas para a produção de resultados práticos.

# 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

The syllabus allows students to understand the importance and contact with basic methods of manipulation of databases structured with great volumetry.

It also allows students to become acquainted with elementary techniques and manipulation of large databases and also to develop, in an expeditious and almost cost free, exploratory processes essential to any data analysis with wellidentified practical objectives.

This exploratory analysis consists of applying computer libraries ("packages") that can, almost immediately, help to organize, visualize and do some elementary analyzes of the databases with a minimal development effort.

It compels students to develop a critical spirit for the results produced by the various computational libraries and to compare contradictory results by preparing reports that allow better understanding of compiled data structures for the production of practical results.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

O objetivo principal da Unidade Curricular é dotar os alunos de competências computacionais adequadas ao tratamento estatístico de grandes conjuntos de dados.

As metodologias de ensino serão essencialmente de natureza prática, em laboratórios computacionais, depois de introduzidos os conceitos elementares do software adotado.

A avaliação consiste em trabalhos práticos de análises estatísticas.

# 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

The main objective of the Curricular Unit is to provide students with computational skills suitable for the statistical treatment of large data sets.

The teaching methodologies will be essentially of a practical nature, in computer labs, after introducing the elementary concepts of adopted software.

The evaluation will consist of practical works on statistical analysis.

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Pretende-se que os alunos adquiram competências computacionais de análise estatística através de um software adequado.

A resolução computacional de problemas práticos fornece aos alunos capacidades importantes para resolução de problemas reais e concretos bem como de capacidades de análise critica aos resultados obtidos.

A resolução prática computacional fornece ainda aos alunos capacidades extra de programação ou adaptação das linguagem e bibliotecas a utilizar.

#### 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

It is intended that students acquire computational skills of statistical analysis through appropriate software.

The computational resolution of practical problems provides students with important skills for solving real and concrete problems as well as analytical skills for the results obtained.

The practical computational resolution also provides students with extra programming skills in the language to use and packages selected.

# 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

Johnson, R. and Wichern, D. W. (2007), Applied Multivariate Statistical Analysis, 6th Edition, Prentice Hall, New

Hastie, Trevor, Tibshirani, Robert, Friedman, Jerome (2009). The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition. Springer-Verlag, New York

Bishop, Christopher (2006). Pattern Recognition and Machine Learning, Springer-Verlag, New York

Dalgaard, P. (2008), Introductory Statistics with R, Springer-Verlag, New York

Spector, P. (2008), Data manipulation with R, Springer-Verlag, New York

#### Anexo II - Teoria dos Números e Aritmética Transfinita

## 9.4.1.1. Designação da unidade curricular:

Teoria dos Números e Aritmética Transfinita

#### 9.4.1.1. Title of curricular unit:

Number Theory and Ordinal Arithmetic

#### 9.4.1.2. Sigla da área científica em que se insere:

### 9.4.1.3. Duração:

Semestral / Semester

#### 9.4.1.4. Horas de trabalho:

#### 9.4.1.5. Horas de contacto:

TP:56

#### 9.4.1.6. ECTS:

## 9.4.1.7. Observações:

<sem resposta>

### 9.4.1.7. Observations:

<no answer>

# 9.4.2. Docente responsável e respetiva carga lectiva na unidade curricular (preencher o nome completo):

Manuel Almeida Silva - TP:36

# 9.4.3. Outros docentes e respetivas cargas lectivas na unidade curricular:

Manuel Messias Rocha de Jesus - TP:20

# 9.4.4. Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes):

Pretende-se que o aluno aprenda as noções básicas de teoria de números e da aritmética transfinita e seja capaz de compreender e produzir argumentos matemáticos simples

# 9.4.4. Learning outcomes of the curricular unit:

The student is supposed to learn the basic methods of number theory and transfinite arithmetic and the corresponding mathematical proofs.

### 9.4.5. Conteúdos programáticos:

- Primos, divisibilidade e teorema fundamental da aritmética.
- Máximo divisor comum e algoritmo de Euclides. Equação linear diofantina.
- Congruências. Teorema de Fermat. Teorema de Euler.
- Teorema chinês dos restos. Raízes primitivas. Teorema da reciprocidade quadrática.
- Equações Diofantinas não lineares. Equação de Pell. Ternos Pitagóricos. Método da descida infinita de Fermat. Curvas elípticas.
- Teoria intuitiva dos cardinais.
- Comparação de cardinais.
- Axioma da Escolha, Teorema de Zermelo e o Lema de Zorn.
- Aritmética dos cardinais infinitos, Hipótese do Contínuo.
- Teorema de Goodstein.

#### 9.4.5. Syllabus:

- Prime numbers, divisibility and the fundamental theorem of arithmetic.
- Maximum common divisor and Euclid's algorithm. Diophantine linear equation.
- Congruences. Fermat's theorem. Euler's theorem.
- Chinese remainder theorem. Primitive Roots, Quadratic reciprocity theorem.
- Nonlinear Diophantine Equations. Pell's equation. Pythagorean triples. Fermat's infinite descent method. Elliptic Curves.
- Intuitive theory of cardinal numbers.
- Ordering cardinal numbers.
- Axiom of Choice, Zermelo's Well-Ordering Theorem and Zorn's Lemma.
- Cardinal arithmetic and Continuum Hypothesis.
- Goodstein's Theorem

#### 9.4.6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

A complexidade dos conceitos discutidos aumenta gradualmente ao longo dos itens discutidos no programa, sendo as primeiras noções discutidas bastante elementares.

A discussão de aplicações práticas e algoritmos associados aos conceitos discutidos reforça a compreensão dos

Exemplos de problemas discutidos por matemáticos desde Euclides ajudam a perceber a relevância dos temas discutidos.

## 9.4.6. Demonstration of the syllabus coherence with the curricular unit's learning objectives.

We start from basic notions and progress to more elaborated concepts.

The discussion of relevant applications and algorithms helps to motivate the concepts discussed.

Examples from the history of mathematics since Euclides will make clear the importance of the concepts discussed.

# 9.4.7. Metodologias de ensino (avaliação incluída):

As aulas são teórico-práticas. Além da exposição da matéria, que é ilustrada com exemplos de aplicação, são propostos, para resolução pelos alunos, exercícios de aplicação dos métodos e resultados apresentados. Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas ou nas sessões destinadas a atendimento de alunos.

Avaliação:

Avaliação Contínua: frequência de aulas, 2 testes

Exame final

### 9.4.7. Teaching methodologies (including evaluation):

Classes consist on two different aspects: an oral explanation which is illustrated by examples and the resolution, by the students, of proposed exercises.

Students can ask for any questions either in class or during office hours.

Evaluation:

2 Tests during the semester

or

Final Exam

# 9.4.8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular.

Nas aulas procede-se à exposição da matéria, ilustrada com exemplos e contra exemplos. Depois de explicados e exemplificados, os resultados são demonstrados. São resolvidos exercícios a título de exemplo.

Os alunos resolvem problemas de uma lista de problemas fornecida, devendo entregar resoluções por escrito e discutir as resoluções apresentadas com o docente.

Quaisquer dúvidas são esclarecidas no decorrer das aulas ou nas sessões destinadas a atendimento de alunos. Para obter aprovação o aluno deve obter a frequência nas aulas.

## 9.4.8. Demonstration of the coherence between the teaching methodologies and the learning outcomes.

In class, the subjects are explained and illustrated by examples and counter examples. The proofs are rigorously presented. Some important problems are solved.

Students solve problems from a given list, some of them should be discussed with the professor in class.

Students are invited to ask questions during the classes or in weekly scheduled sessions.

To obtain approval must attend classes.

## 9.4.9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória:

- Gareth Jones, Josefine Jones, Elementary Number Theory, Springer 1998
- William Stein, Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets, Springer 2008
- H. Davenport, The Higher arithmetic, Cambridge 2008
- H. B. Enderton, Elements of Set Theory, Academic Press, 1977
- A. J. Franco de Oliveira, Teoria de Conjuntos, Livraria Escolar Editora, 1982
- P. R. Halmos, Naive Set Theory, Springer, 1998

#### 9.5. Fichas curriculares de docente

#### Anexo III

## 9.5.1. Nome do docente (preencher o nome completo):

<sem resposta>

### 9.5.2. Ficha curricular de docente:

<sem resposta>